
上善若水·股票论坛
bbs.miaogu.com
掘金
從這裡開始
上善若水图书馆·开启您的财富之门

金融学前沿译丛

INVESTMENT UNDER UNCERTAINTY

不确定条件下的投资

[美] 阿维纳什·迪克西特 Avinash K. Dixit
罗伯特·平迪克 Robert S. Pindyck /著

朱勇 黄立虎
丁新娅 朱静 /译

朱勇 /校

中国人民大学出版社

著作权合同登记号
图字：01-2001-3397号

INVESTMENT UNDER UNCERTAINTY

不确定条件下的投资

"本书成功地将业已丰富了我们对金融市场理解的期权定价的理念和技术运用于资本预算。这种姗姗来迟的应用将极大地改变商学院讲授金融理论的方式以及经济系讲授投资理论的方式。"

——默顿·H·米勒（Merton H. Miller），诺贝尔经济学奖获得者

"在传统上，期权理论被应用于精心设计以执行选择功能的金融工具，这些金融工具对大多数人来讲没有太大的用处。更重要的期权是由自然所创造出来的，包括我们所面临的所有重要选择。当我们还可以等待时，是否现在就消费资源（执行期权）。迪克西特和平迪克提供了将现代期权理论用于这些决策中的一种极富启发性的讨论，并且揭示了这种理论如何解释当经济波动时我们所观察到的现象。他们的理论意义非凡。"

——罗伯特·J·希勒（Robert J. Shiller），耶鲁大学教授

"《不确定条件下的投资》是两位杰出研究人员的一本激动人心的著作。本书全面地总结了有关的技术性结论，这些结论对研究涉及技术上不可逆的各类实践问题的经济学家及其他读者很有帮助。"

——托马斯·J·萨金特（Thomas J. Sargent），芝加哥大学教授

策　　划：马学亮　E-mail:mama113@sina.com
责任编辑：吴　晓　陈　宏　邢伯春
版式设计：赵星华

ISBN 7-300-04339-9

9 787300 043395 >

ISBN 7-300-04339-9/F·1349
定价：49.00元

金融学前沿译丛

INVESTMENT UNDER UNCERTAINTY

不确定条件下的投资

[美] 阿维纳什·迪克西特 Avinash K. Dixit
罗伯特·平迪克 Robert S. Pindyck /著

朱 勇 黄立虎
丁新娅 朱 静 /译

朱 勇 /校

上普拉卡股票论坛 bbs.miaogu.com

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

不确定条件下的投资/［美］迪克西特，［美］平迪克著；朱勇等译.
北京：中国人民大学出版社，2002
金融学前沿译丛

ISBN 7-300-04339-9/F·1349
Ⅰ.不…
Ⅱ.①迪…②平…③朱…
Ⅲ.投资学
Ⅳ.F830.59

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 088219 号

金融学前沿译丛
不确定条件下的投资
［美］阿维纳什·迪克西特 罗伯特·平迪克 著
朱 勇 黄立虎 丁新娅 朱 静 译
朱 勇 校

出版发行：中国人民大学出版社
（北京中关村大街 31 号 邮编 100080）
邮购部：62515351 门市部：62514148
总编室：62511242 出版部：62511239
本社网址：www.crup.com.cn
人大教研网：www.ttrnet.com
经 销：新华书店
印 刷：涿州市星河印刷厂

开本：787×965 毫米 1/16 印张：30 插页 2
2002 年 11 月第 1 版 2002 年 11 月第 1 次印刷
字数：496 000

定价：49.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

bbs.miaogu.com 股票论坛

“金融学前沿译丛”总序

无论是对研究者还是对实践者，金融领域都是一处最值得冒险的乐园。诺贝尔经济学奖也不断眷顾着这个领域的佼佼者。政府、企业和居民都已经认识到，金融系统构成了整个经济体系的心脏。穷国的百姓们逐渐接受着超出传统的储蓄思维以外的投资知识，股票、债券不再是发达资本主义国家的专利，跟随经济全球化的步伐，不发达国家的居民开始和发达国家的居民一同选择明星公司的金融产品，并成为这些公司的所有者。不过，金融产品的复杂性和金融市场固有的投机性并不仅仅带来刺激，当自己的财富在较短时间内像空气一样蒸发时，金融就仿佛和撒旦紧密结合在一起了。直到今天人们还在议论着密西西比事件、郁金香事件、南海泡沫等，20世纪30年代的大危机更是很多人心头挥之不去的阴影。

如果在这样一个世界里，各种金融产品的收益可以通过概率估计出来，同时，通过历史数据的收集和处理，可以推断一种金融产品的收益方差和标准差，那么投资者就可以通过精确的数学工具来计算满足自己要求的投资组合，实现同等风险下的收益最大化或同等收益下的风险最小化。20世纪50年代初，哈里·马克威茨（Harry Markowitz）就是这样思考的，尽管一些人早就认识到这一问题，但却是他第一次系统地用数理统计的语言描述了金融市场上投资者的可能行为。在此基础上，夏普（Snarpe）等人发展出了众所周知的资产定价模型，后来默顿（Merton）、布莱克（Black）和斯科尔斯（Scholes）等人又开发出了期权定价模型。这些金融领域中最活跃的聪明绝顶的大师们先后获得了诺贝尔经济学奖。

自从马克威茨的论文发表以后，经过众多杰出人士的努力，人们似乎已经得到了预期中的世界。资产定价在金融学中的地位，就如同一般均衡理论在经济学中的地位一样，它像一顶皇冠吸引着无数的追求者。所谓现代金融理论其实就是用标准的主流经济学的原理和方法精确刻画金融活动的产物。在马克威茨之前，金融学仅仅关心货币对一国经济发展的作用，众多所谓的金融学家根本无视投资者的行为和金融产品的复杂性，金融危机的爆发仅仅被归结为政府的财政政策和

货币政策的失灵，金融市场本身的一些关键特性被完全忽略了。金融学成了货币经济学的代名词。经过马克威茨和夏普等人的努力，投资者行为逐渐成为金融学研究的核心，也正是到了此时，金融学才真正成为经济学中独立的一员，资产定价理论也逐步成为大学金融学的主干课程。到了20世纪70年代，信息经济学和博弈论的发展给现代金融理论带来了更大的机遇，戴蒙德（Diamond）、斯蒂格利茨（Stiglitz）、曼昆（Mankiw）、格罗斯曼（Grossman）等一大批一流的年轻经济学家开始运用新的分析工具阐释金融领域中的各类现象，这些研究成果不仅对经济学本身产生了重要影响，更重要的是，金融理论开始走出资产定价技术这一狭窄范畴。金融领域的研究者发现，金融危机、金融机构行为 、金融市场结构等都需要重新在理论上加以解释。研究前景是如此广阔，新的专业刊物层出不穷 ，新的科研成果令人目不暇接。到了20世纪90年代，研究者已经不满足于纯粹的新古典理性选择模型，开始有意识地探索投资者行为的社会政治基础，政治法律制度、社会和个人心理、金融系统的生态面等因素被广泛考虑，有一些学者甚至想对现有的资产定价模型提出挑战。

当现代金融理论日新月异的时候，国内的金融学研究尚处于启蒙阶段，几个明显的特征可以支持这一判断：首先，从教学上看，货币银行学仍是金融专业最核心的课程，而且还是经济类专业的基础课程，如果按照课程体系的逻辑去理解，这有点本末倒置、不伦不类。从国际化角度看，金融工程学开始试点，但很多人仅仅把金融工程学理解为纯技术的科学，忽视了它背后的经济学理论，这种把金融学等同于数学的看法实际上是对现代金融理论新发展的片面理解。其次，从研究层次看，对国外研究成果模仿者居多，对现存问题描述性讨论较多，缺乏自身对现象背后的内在逻辑的理解。实际上，金融问题和任何经济问题一样，都有其社会制度背景，如果忽略这种背景知识，盲目地和国际接轨，只能给人以隔靴搔痒的感觉。特别是理论模型如果没有对现实的深刻理解作支撑，输入的是垃圾，输出的一定也是垃圾。最后，从出版物看，金融出版物可能是经济类出版物最繁荣的一块，但这些出版物中，国内著作有一部分仅仅是在讲述一些不太准确的金融故事；另一部分则对中国特定的金融活动有较深的理解，但缺乏有效的分析方法，使得这种理解在理论层次上仍有待升华。国内著作的现状与国外译著引进的落后局面有关。迄今为止，很多出版社相继推出了各种金融学名著译丛，但所选名著也大多代表过去的已经形成教科书的著作，并且即使是这些名著也大多是针对本科生的，而探索性的著作则很少见。

金融活动没有国界，但对金融活动的理解一定是有文化和制度内涵的。如果

中国的金融市场要得以繁荣，仅仅依靠一些缺乏理论和经验证据的政策辩论是毫无意义的，并且还可能误导决策者和普通投资者。如果要形成正确的金融活动决策，就需要掌握科学的研究方法，这就要求中国的学者必须对国外研究成果有较全面的掌握，而不能各取所需，一叶障目。也只有全面了解现代金融理论前沿的进展情况，才能真正实现学者之教书育人和传播知识的功能。正是对中国金融研究现状的担忧，使得我们下决心把国外一些最新的研究成果介绍进来，一方面能够使国内的研究者、特别是青年研究者较全面地了解现代金融学的进展；另一方面，也可借此机会和众多同仁切磋心得，共同提高国内的金融研究水平。基于以上的想法，我们组织翻译了这套“金融学前沿译丛”。

这套译丛不仅包括《不确定下的投资》这类纯技术著作，也包括比较制度分析在金融领域中的运用，如《比较金融系统》；还包括最新的行为金融著作《并非有效的市场：行为金融导论》。同时，我们也关注到金融中的传统课题——货币，不过新的研究更加重视政治对货币政策和经济周期的影响，所以我们选择了《货币制度理论》。这些译著中，有些未必是经典著作，但它们至少能够从研究层次上拓宽我们的视野，比如《金融创新》一书，该书运用熊彼特（Schumpeter）的理论系统研究了金融创新活动，这也是迄今理论界对金融创新活动的一个较好的理论解释。当然，我们将继续从国外现有的研究成果中遴选出比较独到的作品呈献给读者，也希望得到同仁们更多的批评指正。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

北京奥尔多投资研究中心全体同仁＋马学亮

2002 年 5 月 11 日

中译本序言

上善若水股票论坛 bbs.niaogu.com

对作者来讲，看到自己的著作受到高度评价并被广泛阅读当然是一件非常高兴的事。我们的作品被译成中文出版，它将有上百万的读者群，这个事实当然是赞赏我们作品的一种明证。我们感到非常荣幸。感谢朱勇博士对本书的翻译。

我们集中研究实物期权方法在不确定条件下的投资问题中的应用。这些工作与其他作者的工作一起，对投资理论和投资实践产生了深远的影响。这同样也是一件令人高兴的事。中国的经济已经经历了一个持续快速增长的阶段，考虑到中国经济中潜在的巨大风险，对许多部门来讲，更加谨慎地作出投资项目的选择是非常重要的。我们希望本书中文版的问世对此有所帮助。这种希望不仅仅是对研究投资和增长问题的经济学家

的，而且也包括参与或大或小的资本预算决策的政策制定者和商业从业人员。

毫无疑问，本领域研究和应用的快速进展意味着任何快速的写作都会落后于时代的步伐。我们认为，本书中所介绍的基本方法和技术经得起时间的检验，因此，本书仍然是学习本领域的基础理论的一份好材料。然而，我们也希望本书读者能了解更新的发展。幸运的是，有两个网站提供了这方面的大量资料。其中一个非常优秀的网站列出了本领域的文章、著作、软件及其他产品，它是由巴西的马克·A·G·戴斯（Marco A. G. Dias）博士所维护的，其网址为：http://www.puc-rio.br/marco.ind/main.html。还有一个学术性的咨询组织，称为实物期权小组。它们的网站列出了最近的项目和即将召开的会议及有关联系人。该网站的网址为：http://www.rogroup.com。

我们希望有兴趣的读者立即阅读本书及其他相关材料，学习不确定条件下投资的政策设计这一令人激动而且富有成果的方法。

阿维纳什·迪克西特

罗伯特·平迪克

上善若水股票论坛
bbs.miaogu.com

前　言

上善若水股票论坛 bbs.mjiaogu.com

本书提供了关于企业资本投资决策的一种新理论方法的系统性处理，强调了大多数投资决策中的不可逆性以及作出这些决策时经济环境中不断发生的不确定性。这种新方法认识到了等待更好（但永远不完全）信息的期权价值。它利用了金融市场期权理论的一种类推，使其比传统投资理论有丰富得多的动态框架。

将投资机会看做期权的新观点是许多经济学家十多年来研究的成果，而且仍然是各类期刊文章中的一个活跃的主题。这种新观点引起了对传统理论的一些明显的修正。它证明讲授给每位商学院学生和经济学院学生的传统"净现值"（NPV）规则可能会给出非常错误的答案，因为净现值规则忽略了投资中的不可逆性及延误的选

择。基于同样的原因，新理论还同传统教科书来自于马歇尔的生产与供给观点相矛盾。依照传统观点，当价格超过长期平均成本时企业会进入或扩张，当价格下降至低于平均可变成本时，企业将退出或收缩。基于传统理论的政策规定，如利用利率缺口来激励投资及基于价格—边际成本的反托拉斯政策等，也会产生问题。

在本书中，我们尽量以一种清晰、系统的方式来介绍这种新理论，而且对它加以统一、综合、甚至在一些地方扩展了这一正在成长的研究领域的各种研究方向。尽管有大量的而且不断增长的期刊文献，包括我们各自的一篇综述，但是著作形式具有明显的优势。它给我们提供了充足的空间，使我们
xii 以更好的次序更详细地阐述不同的主题，而且将它们与其他一些主题联系起来。它还给我们提供了介绍和解释新技巧的机会，这些技巧隐含于本书大部分章节中，但对经济学家来讲往往还不是非常熟悉。我们希望该理论在教学法上得到较好的处理，对学生、研究人员、实践人员等有所帮助。然而，比教学法本身更重要的可能是以著作形式提供了有关这一主题及动态不确定经济世界的运行机制的一种宽泛的视角。

本书的主要目的是阐明并解释这一理论，但是我们认为将理论运用到现实世界通常是最好的做法。因此，我们经常利用属于某些具体产业或产品的数据来得到理论的数值解。我们认为，这些计算的累加权重构成了投资新理论的有效性和数量意义方面的强有力的初步证据。然而，更严格的计量经济学检验，以及为管理者设计出改良后的决策工具所必须的更细致的工作等都还需要更深入的研究。我们相信这是一个令人激动和非常重要的主题，而且希望本书能够推动这一领域的研究，并对此类研究有所裨益。

本书针对三大类读者。第一类读者是对投资理论及其政策含义感兴趣的经济学家。其中包括从事微观经济理论、宏观经济理论和产业组织理论研究的研究生，以及对投资问题有兴趣的大学或其他机构的研究人员。第二类读者是金融经济学领域的学生和研究人员，他们一般对公司理财感兴趣，特别是资本预算，其中包括研究资本预算问题（即企业应当如何评价项目并作出资本投资决策）的研究生，以及任何对投资决策和投资行为感兴趣的金融研究人员。第三类读者是金融从业人员，其中包括在金融机构工作并关心公司及其资产评价的人员，及必须评价并决定是否为他们的企业进行大规模投资的企业经理。

xiii 本书的一些部分有相当的技巧，但它们不会妨碍有兴趣的读者。前两章

提供了关于不确定条件下不可逆投资理论的一种相当简洁且相对独立的介绍。这两章包括了许多基本理念，但是回避了所有技术细节和数学形式。我们可以保证，阅读这两章是一种低风险、高回报的投资，即使是那些对经济学知识和金融教科书非常生疏的从业人员也有能力在无须太多努力和不太困难的条件下读懂这两章。

我们预料到许多读者想更详细地探究这种理论并试图了解一些技术问题，但是他们缺乏必要的数学工具。考虑到这些读者的需要，我们利用两章的篇幅（第 3 章和第 4 章）对构成本书基础的数学概念和数学工具提供了一个相对独立的介绍。（这些工具的适用性已经远远超出了不确定条件下的投资理论，因此，我们预期一些读者将发现这两章是有用的，即使他们的应用兴趣在其他领域，如宏观经济、国际贸易或劳动经济学。）

然而，我们认为，使用技巧是学习技巧的最好方法。因此，我们并不准备像数学那样非常严格和统一。我们尽可能地依靠直觉，在附录中概括了一些简单的正式证明，并为想了解更严格或更深奥的数学知识的读者推荐了一些更高深的论述。对大多数读者而言，我们建议先读一遍第 3 章和第 4 章，然后进入后面使用这些知识的章节。我们认为，与试图首先以抽象形式掌握这些知识相比，这样做，这些知识将以更容易理解的数学形式出现。

最后，我们希望许多读者愿意弄明白与例子和应用一起详细阐述的投资新观点，包括其可能的分支。第 5 章～第 12 章正好提供了这些内容，从第 5 章不可逆投资的相对简单的基本模型入手，我们逐步建立起第 6 章和第 7 章说明企业开始或终止生产决策的更完整的模型，再到第 8 章和第 9 章解释产业内部企业之间相互作用的模型，最后是第 10 章、第 11 章和第 12 章有关这种理论及其应用的更进一步的推广。

本书是我们两人过去多年在投资理论研究上的副产品。这项研究（以及 xiv
这本书）从我们所在机构及其他部门的同事和朋友间的相互交流中受益颇多。试图列出我们曾经获得见识、观点以及鼓励的人将大大增加本书的篇幅。然而，一些人在阅读过我们的研究报告和本书部分章节的草稿后，曾经以评论、批评或建议的形式，对我们帮助很大，他们值得特别指出：朱瑟皮·伯特拉（Giuseppe Bertola），奥利弗·布兰查德（Olivier Blanchard），阿兰·布林德（Alan Blinder），里卡多·卡巴利罗（Ricardo Caballero），安德鲁·卡普林（Andrew Caplin），约翰·考克斯（John Cox），伯纳德·杜马斯（Bernard Dumas），基因·格罗斯曼（Gene Grossman），珊迪·格罗斯曼（Sandy

Grossman)，约翰·利希(John Leahy)，吉尔伯特·麦特考夫（Gilbert Metcalf），马修斯·米勒（Marcus Miller），朱利奥·鲁特伯格（Julio Rotemberg）和王江(Jiang Wang)。另外，我们想感谢利德·韦（Lead Wey）在本书形成中突出的研究助理工作。我们也要感谢林·斯蒂勒（Lynn Steele）在准备本书手稿的最后一稿时在编辑方面的帮助。

本书的第二次印刷给我们提供了修正一些错误的机会。我们感谢所有指出错误并引起我们注意的读者，特别是太平洋联合大学（PUC）的马可·迪亚斯（Marco Dias）、佐治亚州立大学（Georgia State University）的里奥·德·詹尼罗（Rio de Janeiro）和戴维·纳克曼（David Nachman）。我们确信仍然存在许多错误，但是我们在实践着资本理论中的原理：原稿不可能被改进到完美，而只能达到使其进一步的改进率等于利率的地步。

最后，我们要感谢彼得·多格黑蒂（Peter Dougherty），我们在普林斯顿大学出版社的编辑，感谢他在我们准备本书过程中的鼓励和建议，感谢他在本书制作中的指导。

最后，我们两人对所获得的金融支持表示感谢。阿维纳什·迪克西特感谢美国国家科学基金和Guggenheim基金的支持。罗伯特·平迪克感谢美国国家科学基金和MIT能源与环境政策研究中心的支持。

bbs.miaogu.com

阿维纳什·迪克西特
罗伯特·平迪克

金融学前沿译丛编委会

李　扬　中国社会科学院金融研究中心研究员/博士生导师

谢　平　中国人民银行研究局研究员/博士生导师

唐寿宁　北京奥尔多投资研究中心主任

　　　　中国社会科学院经济研究所《经济研究》副编审

朱武翔　清华大学经济管理学院金融系副主任/博士

吴联生　北京大学光华管理学院会计系副教授/博士

王晋斌　中国人民大学农业经济系副教授/博士

周业安　中国人民大学经济学院副教授/博士

何　帆　中国社会科学院国际金融研究中心副主任研究员/博士

樊小云　南开大学经济学院副教授/博士

张晓晶　中国社会科学院经济所副研究员/博士

马学亮　中国人民大学出版社副编审

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

Investment Under Uncertainty
Copyright © 1994 Princeton University Press
Chinese(Simplified Characters only)Trade Paperback copyright © 2002
by China People's University Press
Published by arrangement with Princeton University Press
In associaton with Arts & Licensing International, Inc.
ALL RIGHTS RESERVED

本书由美国普林斯顿大学出版社提供独家中文版权。

上善若水股票论坛
bbs.miaogu.com

目 录

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

第Ⅰ篇 导 论

第1章 投资新观点 ………………………………………… 3
1.1 传统理论 ………………………………………… 4
1.2 期权方法 ………………………………………… 5
1.3 不可逆性及等待的能力 ………………………… 7
1.4 全书概览 ………………………………………… 9
1.5 非经济中的应用 ………………………………… 21
第2章 通过简单例子阐释概念 ………………………… 24
2.1 两阶段下的价格不确定性 ……………………… 25
2.2 将模型扩展到三阶段 …………………………… 37
2.3 成本的不确定性 ………………………………… 41
2.4 利率的不确定性 ………………………………… 43
2.5 规模经济与灵活性 ……………………………… 45

2.6 文献导引 …… 49

第Ⅱ篇 数学基础

第3章 随机过程和伊藤引理 …… 55
3.1 随机过程 …… 56
3.2 维纳过程 …… 59
3.3 广义布朗运动——伊藤过程 …… 66
3.4 伊藤引理 …… 73
3.5 反射壁和长期分布 …… 77
3.6 跳跃过程 …… 78
3.7 文献导引 …… 81
附录 柯尔莫哥洛夫方程 …… 82
第4章 不确定条件下的动态最优化 …… 88
4.1 动态规划 …… 90
4.2 或有债权分析 …… 107
4.3 两种方法之间的联系 …… 113
4.4 文献导引 …… 117
附录 1. 递归动态规划 …… 118
2. 最优停止区域 …… 119
3. 平滑粘贴 …… 121

第Ⅲ篇 企业决策

第5章 投资机会与投资时机 …… 127
5.1 基本模型 …… 128
5.2 利用动态规划求解 …… 131
5.3 或有债权分析的解 …… 138
5.4 最优投资规则的特征 …… 142
5.5 其他的随机过程 …… 149
5.6 文献导引 …… 160
第6章 项目价值与投资决策 …… 164
6.1 最简单的情形：没有经营成本 …… 166

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

6.2 经营成本与临时推迟…… 173
6.3 可变产出的项目…… 182
6.4 折旧…… 185
6.5 价格与成本不确定…… 192
6.6 文献导引…… 196
第7章 进入、退出、储存与废弃 …… 199
7.1 进入与退出的混合战略…… 201
7.2 储存、重新启动与废弃…… 213
7.3 文献导引…… 225

ix

第Ⅳ篇 产业均衡

第8章 竞争性产业的动态均衡 …… 231
8.1 基本直觉…… 233
8.2 加总的不确定性…… 236
8.3 退出条件下的产业均衡…… 244
8.4 特定企业的不确定性…… 249
8.5 一个一般模型…… 259
8.6 文献导引…… 262
第9章 政策干预与不完全竞争 …… 264
9.1 社会最优…… 266
9.2 一些常用政策的分析…… 276
9.3 垄断性产业的例子…… 289
9.4 文献导引…… 293
附录 一些预期现值 …… 294

第Ⅴ篇 推广与应用

第10章 序列投资…… 299
10.1 开始和完成多阶段项目的决策…… 301
10.2 连续投资与建造时机…… 308
10.3 学习曲线与最优生产决策…… 317
10.4 成本不确定性与学习…… 323

上善若水股票论坛 bbs.shjiaogu.com

10.5 文献导引 …… 328
附录 偏微分方程的数值解 …… 329
第11章 累积投资与生产能力选择 …… 335
11.1 报酬递减条件下生产能力的逐步扩张 …… 337
11.2 报酬递增与生产能力的集中增加 …… 353
11.3 调整成本 …… 357
11.4 文献导引 …… 366
第12章 应用及实证研究 …… 370
12.1 近海石油储备的投资 …… 372
12.2 电厂对《空气清洁法》的遵守 …… 379
12.3 环境政策的时间选择 …… 386
12.4 解释总投资行为 …… 391
12.5 文献导引 …… 397

参考文献 …… 401
符号表 …… 421
作者索引 …… 424
主题索引 …… 434
译后记 …… 462

上善若水股票论坛
bbs.miaogu.com

第Ⅰ篇

导 论

上善若水股票论坛
bbs.miaogu.com

上善若水股票论坛
bbs.miaogu.com

第1章　投资新观点

上善若水股票论坛
bbs.mjiaogu.com

经济学将投资定义为对未来回报的预期而承受瞬时成本的行为。从这个意义上讲，建造厂房、安装设备的企业，储存商品用以销售的商人，在职业培训上花费时间的个人等都是投资者。稍稍不太明显的是，一家企业关闭一家产生损失的工厂也是一种"投资"：初始支出是企业为把自己从合同条款中解脱出来所必须作出的支付，包括工人的解雇费；而预期回报则是未来损失的减少。

从这种观点来看，投资决策无处不在。你购买本书就是一种投资。至于其回报，如果你是一位经济学家，我们的期望是你对投资决策的一种改进的理解；如果你是一位商学院学生，我们希望能提高你在未来的职业生涯中作出此类决策的

能力。

大多数投资决策在不同程度上具有三个基本特征：(1) 投资是部分或完全不可逆的。换句话说，投资的初始成本至少部分是沉没的；当你改变主意时你不能完全收回投资的初始成本。(2) 来自投资的未来回报是不确定的，你所能做到的只是评估代表你的投资中较高或较低收益（损失）的不同结果的概率。(3) 你在投资时机上有一定的回旋余地。你可以推迟行动以获得有关未来的更多信息（当然，永远不可能是完全确定的）。

这三个特征之间的相互作用决定了投资者的最优决策。这种相互作用正
4 是本书的核心。我们将详细阐述不确定条件下不可逆投资的理论，并用一些实际应用的例子加以说明。[1]

投资的传统理论没有认识到不可逆性、不确定性及时机选择两两之间的相互作用在数量和质量上的重要意义。我们将指出，这种忽视解释了传统理论的一些错误。例如，与大多数早期模型的预测相比，现实世界的投资似乎对利率变化及税收政策的改变不太敏感，而对经济环境中的波动性及不确定性要敏感得多。我们还将说明这种新观点如何解决这些异常现象，并在此过程中提供了制定有关投资的更有效的公共政策方面的建议。

一些似乎是非经济类的个人决策也具有投资的特征。这里只给出一个例子。婚姻包含着求爱期不断增加的成本，以及未来幸福或痛苦的不确定性。婚姻可以通过离婚来取消，但只能以高昂的成本为代价。许多公共政策的决策也有类似的特征。例如，关于刑事被告的民事权利与社会秩序之间相对重要性的公共理念随时间推移而变化，但制定或改变包括这两者之间特定的相对权重的法律的代价是高昂的。当然，这些非经济决策的成本和收益的量化是非常困难的，甚至根本不可能量化，但我们的一般理论也可以提供一些关于它们的定量化考察。

1.1 传统理论

当一家企业面临未来市场条件的不确定性时，它应当如何作出是否投资于新工厂的决策？大多数经济学院和商学院的学生仍然被传授着应用于此类问题的简单规则。首先，算出新工厂将产生的预期利润流的现值；其次，算出建造工厂所需的支出流的现值；最后，算出两者之间的差（投资的净现

值，NPV）是否大于零。若大于零，则进行投资。

但是，在计算这一 NPV 时产生了一些问题。例如，如何估计新工厂产生 5
的预期利润流？如何处理通货膨胀？在计算现值时应当采用什么样的贴现率（或利率）？解决此类问题是公司理财课程中的重要主题，特别是资本预算，但其基本原理却非常简单，即算出投资项目的 NPV 并检验它是否为正。

NPV 规则也是讲授给经济学本科生和研究生的新古典投资理论的基础。这里我们发现了利用标准增量或经济学家的边际方法所表达的规则：投资直到增加的单位资本的价值正好等于其成本。这样，在决定增加的单位资本的价值及其成本中再次产生了问题。例如，应当假定什么样的产出结构？税收和折旧应当如何处理？

许多投资经济学的理论和实证文献处理了此类问题。我们发现了两种本质上相同的方法。其一，沿袭乔根森（Jorgenson，1963）的理论，将增加的单位资本的每期价值（即边际产出）与从购买价格、利率与折旧率及适用的税率中算出的一个“等价的每期租赁成本”或“使用成本”进行比较。通过令资产的边际产出等于其使用成本，可以发现企业必需的资本存量。假定实际的资本存量调整到理想状态，或者是特定的时滞过程，是对确切的调整成本的最优反应。尼克尔（Nickell，1978）的著作提供了该方法发展历程的一种非常好的说明。

其二，源于托宾（Tobin，1969）的理论，是比较边际投资的市场价值（capitalized value）与其购买成本。如果投资的所有权可以在二级市场中交易，则可以直接观察到这个值；否则，它是作为投资可能产生的利润流的预期现值，从而被计算出来的一个推导值。该数值与单位购买价格（重置成本）的比率，称为托宾 q 值，支配了投资决策。如果 $q>1$，投资应当进行或扩张；如果 $q<1$，投资不应当进行，而且现有资本也应当削减。令调整的边际成本等于其收益可以找到投资扩张或收缩的最优比率，它取决于 q 与 1 之间的差别。税收规则可在一定程度上改变这一点，但基本原则是类似的。艾贝尔（Abel，1990）的著作提供了这种投资的 q 理论的一个极好的综述。所有这些理论背后的原则都是基本的 NPV 规则。

1.2　期权方法 6

然而，NPV 规则建立的隐含假定往往被忽略了。更重要的是，它要么

假定投资是可逆的，即无论何种原因，如果市场结果比预期条件差，就可撤销投资且收回支出；要么假定投资是不可逆的，它是一种勿失良机的建议，即如果企业现在不进行投资，将来也不可能投资。

尽管一些投资符合这些条件，但大多数投资并不符合。不可逆性和延期的可能性是现实中大多数投资的非常重要的特征。正如迅速增加的文献所表明的，拖延不可逆投资支出的能力可以严重影响投资决策。它同时也削弱了简单的 NPV 规则，从而也削弱了标准的新古典投资模型的理论基础。原因在于拥有投资机会的企业持有一种类似于金融看涨期权的“选择权”（企业拥有在它所选定的某一未来时刻购买某种资产的权利但不是义务）。当一家企业作出不可逆投资支出时，它就执行或者“消灭”了投资的期权，放弃了等待以获得可能会影响到支出意愿或时机的新信息的可能。一旦市场条件逆转，它不能停止投资。失去的期权价值是一种机会成本，它必须包括在投资成本中。因此，“当单位资本的价格至少与其购买和安装成本一样大时才投资”的 NPV 规则必须修正。该单位资本的价格必须超过购买和安装成本，差额等于保持投资期权存在的价值。

最近的研究已经证明，投资的这一机会成本可能很大，而忽视它的投资规则可能会酿成大错。而且，这一机会成本对项目未来值的不确定性高度敏感，因此影响未来现金流的可察觉风险的经济条件的变化对投资支出有非常大的影响，可以说大于利率变化对投资支出的影响。这可能有助于解释为什么新古典投资理论迄今为止在提供投资行为的一种好的实验模型方面如此失败，以及导致对利率政策和税收政策在刺激投资中的有效性方面过度乐观。

期权的观点还有助于解释为什么企业投资的实际行为不同于在商学院里
7 讲授的公认的知识。企业投资于这样的项目，即预期产生的回报率超过必要的或“最低”预期资本回收率。商业活动的观察家发现，通常这种最低预期资本回收率是资本成本的 3 倍～4 倍。[2]换句话说，直到资本价格上涨到远远超过其长期平均成本，企业才会投资。在价格下降时，通过承受经营损失，企业将长期呆在该产业，而价格可以在不引起投资减少或退出的条件下大幅下降到低于平均可变成本。这似乎也与标准的理论相矛盾，但是，正如我们将要看到的，一旦考虑到不可逆性和期权价值，它就能得到解释。

当然，通常人们可以通过从 NPV 的传统计算中减去执行投资期权的机会成本来重新定义 NPV，并认为，一旦作出这种修正，“如果 NPV 为正就投资”的规则仍然成立。然而，这样做就是接受我们的批评。为强调期权价

值的重要性，在本书中我们选择将它们与传统 NPV 隔开。若其他人选择继续使用"NPV 为正"的术语，只要他们在其 NPV 定义中慎重地包括了所有相关的期权价值，这一术语就是正确的。选择上述用法的读者可以轻易地把我们的陈述转换为上述语言。

在本书中，我们详细论述了不确定条件下不可逆投资的基本理论，强调了投资机会中类似于期权的特征。我们指出，如何能从金融市场中发展出来的期权定价方法中获得最优投资规则。我们还说明了以不确定条件下最优序列决策的数学理论（动态规划）为基础的等价方法。我们举例说明了不同情形下企业的最优投资决策——进入，企业初始规模的确定以及未来代价高昂的规模改变，在提供满足未来条件的灵活性程度不同的投资类型间的选择，一个复杂的多阶段项目的连续阶段的完成，临时停工与重新动工、永久退出等。我们还分析了如何汇总这种企业的行动以决定一个产业的动态均衡。

为强调与金融资产期权的相似之处，获得实际资产的机会经常被称做"实物期权"。因此，本书可以命名为"投资中的实物期权方法"。

1.3 不可逆性及等待的能力 *8*

上善若水股票论坛 bbs.mjaogu.com

在继续进行分析之前，阐明不可逆性、延迟投资的能力及投资期权等概念非常重要。其中最重要的是，什么使投资支出成为沉没成本并因而不可逆？

当投资是特定企业或特定产业时，投资开支是沉没成本。例如，特定企业在营销和广告上的大多数投资是不能收回的，因此，很明显它们是沉没成本。另外，一家钢铁厂属于一种特定产业，它只能生产钢铁。有人可能会认为，由于在原则上钢铁厂可以出售给另一家钢铁公司，因而投资支出是可以收回的且不是沉没成本。这是不正确的。如果该产业是适度竞争的，该工厂的价值对该产业的所有企业来讲都是相同的，那么出售该厂不能获得任何收益。例如，对该企业来讲，如果钢铁的价格下降，企业依据对过去经济发展形势的分析而建设的工厂被证明是一项"坏的"投资，这家工厂同样也会被另一家钢铁公司看做是一项"坏的"投资，那么出售该厂的生产能力不会有多少收益。因此，对钢铁厂（或其他特定产业资本）的投资的大部分应当看做沉没成本。

即使投资不是特定企业或特定产业，它们往往也是部分不可逆的。因为旧机器市场中没有能力评价某一项目质量的购买者只支付对应于该市场中平均质量的项目的价格，了解所售项目质量的销售者将不愿意销售高于平均质量的项目，这将降低市场中项目的平均质量及其市场价格。这种“柠檬”问题（Akerlof，1970）困扰着许多此类市场。例如，办公设备、轿车、卡车及计算机并不是特定产业，尽管它们可以销售给其他产业的企业，但其转售价格将会远远低于其购买成本，即使它们几乎还是新的。

不可逆性也可能产生于政府管制或制度安排。例如，资本控制可能会使外国（或国内）投资者出售其资产并重新配置其资金变为不可能；另外，由于雇用、培训及解雇的高昂成本，对新职工的投资可能也是部分不可逆的。因此，大多数大型资本投资的大部分是不可逆的。

下面让我们讨论延迟投资的可能性。当然，企业并不总是有机会延迟其投资。例如，可能存在这样的情形，出于战略考虑，企业必须迅速投资，从
9 而比现有的或潜在的竞争者优先投资。[3]然而，在大多数情形下，延迟至少是可行的。可能会存在延迟成本（其他企业进入的风险，或仅仅是以前的现金流），但是这一成本必须与等待新信息的收益进行比较。那些收益往往是巨大的。

正如前述，一个不可逆的投资机会非常类似于金融看涨期权。看涨期权赋予其持有者这样的权利：在特定的时间范围内，支付执行价格以获得具有一定价值的资产（如股票）。执行这种期权是不可逆的，尽管这种资产可以出售给其他投资者，但人们也不能收回其期权或执行该期权所支付的货币。拥有类似投资机会的企业持有现在支出货币（执行价格）或未来支出货币以获得具有一定价值的资产（如一个项目）的选择权。此外，该资产可以出售给另一家企业，但这种投资是不可逆的。就像是金融看涨期权的情形，这种投资期权是有价值的，部分是由于通过投资获得的资产的未来价值是不确定的。若该资产价值上涨，来自投资的净回报也上涨。若该资产价值下降，企业不必投资，而仅仅损失它在获得该投资机会时的开支。第2章及以后章节中阐述的不可逆投资模型有助于认清投资机会类似期权的特征。

最后，有人可能会问，企业最初如何获得它们的投资机会，即投资期权。有时候投资机会来自于专利或土地与自然资源的所有权，更一般地，它们来自于企业的管理资源、技术知识、声誉、市场地位及可能的规模。所有这些都可能是随着时间推移而建立起来的，它们使企业有能力极富成效地实

施个人或其他企业不能实施的投资。最重要的，这些投资期权是有价值的。事实上，对大多数企业而言，与它们早已拥有的适当资本相比，其市场价值的大部分可归功于它们在未来的投资期权和成长期权。[4]投资的大部分经济理论和金融理论关注企业应当（及确实）如何执行其投资期权。为更好地理解投资行为，建立一个企业如何获得投资机会的较好模型是非常重要的，这一点正是我们在后面的章节中将要讨论的。

1.4 全书概览 10

这一节概述了全书的安排，并揭示了分析中出现的一些重要概念和结论的特点。

1.4.1 一些介绍性例子

前面说明的“实物期权”的一般观点是简单明了的，但是在评价实物期权的数量意义，说明它们对企业、产业和公共政策的意义之前，必须把它们转换为更精确的模型。第2章以一种简单且温和的方式展开这一计划。我们考察了拥有可以在两阶段决策的“窗口”中贯彻实施的单一离散投资机会的企业。在这两个阶段之间，产出的价格经历了持续的上下波动。假定在平均价格水平上投资是盈利的，因此以较高价格而不是较低价格盈利更是不容置疑的。通过将其决策推迟到第二阶段，企业可以发现实际的价格波动。如果价格升高，企业就进行投资；如果价格下跌，企业则不投资。这样，企业就避免了在第一阶段投资后发现价格下跌所造成的损失。等待的价值必须与第一阶段利润流的损失相权衡。结果（投资或等待决策）取决于特定模型的参数，其中最重要的是不确定性的程度（决定了由等待所规避的价格下降风险）及贴现率（测量了未来与现在的相对重要性）。

为举例说明这些影响并建立对实物期权的直观认识，我们运用了一些数值计算。我们还更严格地考察了它与金融期权的相似之处。我们引入了允许个人转移价格上下浮动风险的市场，即在两种可能性下有不同回报的或有债权。然后我们构建了这些或有债权的一个投资组合，这一组合可以用来确切地复制企业投资的实物期权的风险与回报特征。实物期权的估算价值必须等于复制出的投资组合的价值，否则就会存在套利机会，即投资者可以通过买

入两个相同资产中较便宜的资产并售出较昂贵的资产而获得纯利润。

我们还考察了基本例子的一些其他形式。首先，我们将投资机会窗口扩展到第三阶段，这样，价格在阶段2与阶段3之间可以像它在阶段1与阶段2之间那样上下浮动。我们说明了这种变化如何改变期权的价值。其次，我
11 们考察了项目成本及用于贴现未来利润流的利率的不确定性。最后，我们考虑在不同规模的项目之间的选择，其中大规模的项目拥有较高的固定成本但有较低的营运成本。

即使有了这些扩展和变化，分析仍然停留在举例说明和非常简单的例子水平上，而不是理论所要求的一般性。在后面的章节中，我们开始详细论述一种更宽泛的理论框架。但是这些例子确实产生了一些支持一般化的有价值的见解，在这里我们总结如下。

第一，这些例子表明，投资期权的机会成本是企业投资决策中的一个重要因素。期权价值随投资的沉没成本及未来价格不确定性程度的上升而上升，其中风险下降是最重要的方面。这些结论在第5章~第7章中以更一般化的模型得到确认。

第二，我们将看到，如果企业能够通过远期及期货市场上的交易对风险进行套利，期权价值不受影响。在有效市场中，这种风险是公平定价的，因此风险的任何下降都会被回报的下降抵消。远期交易是一种金融业务，它对企业的实际决策没有影响。（这是莫迪利安尼-米勒（Modigliani-Miller）定理起作用的另一个例子。）

第三，当未来成本不确定时，它们对投资决策的影响取决于不确定性的特殊形式。如果不确定性与企业必须支付的投入品价格有关，它对投资决策的影响就像它对产出品价格风险的影响一样。如果投入品价格已经升高，不进行投资的自由是有价值的，那么不太容易作出立即投资的决策。然而，如果假定项目包括多个步骤，不确定性与投资总成本有关，只有当项目的前几步实施后，关于不确定性的信息才能显示出来。因此，除了对传统NPV的计算有贡献外，这些步骤还具有信息价值。这样，即使传统的NPV在一定程度上为负时开始项目也会是合意的。我们将在第10章回到这一问题，并在一种更一般的理论框架中为它建模。

第四，我们将说明，通过提高未来的灵活性，较小规模的投资可能有助于在一定程度上抵消较大规模投资因其规模经济而享有的优势。

bbs.mitogu.com

1.4.2　一些数学工具

在现实中，投资项目可以有不同的机会窗口，并且有关未来的各种观点不同程度地存在着不确定性。因此，在模型可以应用前，第2章中简单的两 12
阶段例子必须进一步推广。第3章和第4章详细说明了这种推广所需的数学工具。

第3章发展了不确定性的更一般模型。我们首先解释随机过程的特征和性质，这些过程包括把动态变化与不确定性联系起来。在没有不确定性的动态模型中，系统的当前状态就决定了其未来状态。当加入不确定性时，当前状态仅决定了未来状态的可能分布，而不是其实际值。第2章中说明的仅仅是最简单的例子，其中当前价值可在已知概率条件下以固定比例上下浮动。我们描述了在投资理论中特别有用的另外两个过程——布朗运动和泊松过程，并考察了它们的一些特征。

第4章考虑不确定条件下的最优序列决策。对这一优化问题，我们首先从动态规划的一般数学技巧中的一些基本概念出发。通过重述第2章中的两阶段例子，我们引入了动态规划，并说明那些基本概念如何推广到更一般的多阶段选择问题，其中不确定性就是第3章中所介绍的各种随机过程。我们建立了动态规划的基本方程式，并指出应用于本书的特定目的时这些方程的求解方法。然后，我们转到市场假定，其中由随机过程产生的风险可以通过连续的或有债权交易而被交易。我们将说明序列决策如何能通过构建动态套利策略（即一种投资组合，为重现实际投资的回报与风险特征，该组合的成分随时间推移而改变）而被等价地处理。

早已熟悉这些知识的读者除了快速浏览并习惯我们的记号外，可以跳过这两章。不熟悉这些技巧的读者可以把这些章节当做随机过程及随机动态最优化的一种相对独立的导论，即便他们的兴趣不同于在本书其他部分所讨论的内容中的应用。

1.4.3　企业的投资决策

这些知识在后面的章节中将得以运用。第5章～第7章构成了企业投资决策的核心理论。我们从第5章开始，假定投资是完全不可逆的。那么，适当项目的价值仅仅是它所产生的利润（或损失）流的预期现值。这可以根据潜在不确定性的观点来计算，那么投资决策仅仅是支付沉没成本的决策，其回报是获得价值可以波动的一种资产。这实际上类似于金融理论中的看涨期 13

权——以预先设定的执行价格购买一种价值波动的资产的权利而不是义务。因此，该问题可利用第 4 章中说明的知识直接求解。其结论也类似于金融理论中的结论。当资产的价值上升到高于执行价格时，期权可以在盈利条件下执行（期权为“实值”）。然而，当期权刚好为实值时，执行它并非最优，因为通过执行期权，企业放弃了等待并避免价值下降所遭受损失的机会。只有当资产价值充分上升到高于执行价格时（期权是充分高的“实值”），期权的执行才是最优的。

这种观点的另一种模式有助于以托宾的 q 值（即资本资产的价值与其重置成本的比率）的观点来考虑投资的经济学家们的直觉认识。在投资学文献的通常解释中，资本资产的价值由它所产生的利润流的预期现值来测度。那么，对企业来讲，传统标准是当 q 等于或大于 1 时投资。我们的期权价值标准更严格，q 必须充分大于 1。在投资变成最优选择之前，期权价值必须等于或大于临界值 q^*，其中 q^* 大于 1。

我们采用一些数值模拟来算出期权价值及其最优执行规则，并考察期权价值如何随不确定性、贴现率及其他参数值的变化而变化。我们发现，在这些参数的合理范围内，期权价值的影响在数量上非常重要。即使立即投资的预期回报率大大超过利率或名义资本回报率，等待仍然是最优的。在企业执行期权并做出投资之前，回报乘数必须为名义利率的 2 倍～3 倍。

1.4.4 利率与投资

一旦我们理解了企业在决定是否执行投资期权时为什么要小心及如何谨慎，我们也可以理解为什么利率似乎对投资没有影响。传统理论的计量经济学检验发现，利率仅仅是投资需求的一种脆弱或不显著的决定因素。最近的历史也表明，利率削减对投资只有有限的刺激效应，1991—1992 年的经历
14 是这种情形在最近的证明。期权方法提供了一种简单的解释。利率削减一般使未来相对于现在显得更重要，但这同样提高了投资的价值（利润流的预期现值）和等待的价值（减少或避免未来可能损失的能力）。其净效应非常微弱，有时甚至是不确定的。

实物期权方法也表明，未来利润的各种不确定性渠道（产品价格、投入成本、汇率的波动及税收政策和管制政策的变化等）对投资的影响比利率的整体水平对投资的影响重要得多。利率未来走向的不确定性对投资的影响可能也比利率的一般水平对投资的影响大得多。减少或消除不必要的不确定性

可能是刺激投资的公共政策中最好的途径。而在备选方案之间冗长的政策辩论过程所引起的不确定性可能也是投资的严重障碍．在第9章中，我们构建了说明政策不确定性如何能对投资产生重大负面影响的特例。

1.4.5 暂停与废弃

第6章和第7章推广了上面的简单模型。当未来价格和/或成本波动时，适当项目的经营利润可能变为负值。在第5章中，我们假定投资是完全不可逆的，尽管有损失，企业也被迫继续经营该项目。这对某些公共服务项目来讲可能是事实，但是大多数企业有一些现成的退路。第6章和第7章考察了一些这样的退路。在第6章中，我们假定带来损失的项目可暂停，一旦项目重新变为盈利时，项目的经营会在以后恢复。现在一个适当项目就是经营期权的一个序列，利用第4章中的方法评估出所有这些经营期权的价值，然后贴现并加总，才能找到这一经营期权序列的价值。那么，投资机会本身就是得到这种混合资产的一种期权。

在第7章中，我们排除临时性暂停，但允许永久性废弃，这是现实的。如果项目不能维持经营，如矿山洪涝、机器生锈、熟练工人队伍的解散、商标认同的消失等，适当项目的一些有形或无形资本会迅速消失。如果企业决定重新开工，它必须对所有这些资产重新投资。废弃可能有直接成本，例如必须支付工人的解雇费。然而，更重要的是，它往往还有机会成本，即资本品的维护期权的损失，一旦未来环境改善，这些资本品就能够盈利，因此，为保持资本品维护期权继续有效，有适当项目的企业将承受一定的损失，而 15
且只有足够的额外损失才能迫使企业放弃该期权。

事实上，我们这里有一对连环期权。当企业执行其投资期权时，它得到一个合适的项目和放弃期权。如果企业执行其放弃期权，它重新获得了投资期权。为决定最优投资和放弃政策，必须同时对这两个期权定价。这种关联有重要意义。例如，较高的放弃成本使企业对正在进行的投资更加小心谨慎，反之亦然。我们用铜业中的典型数据举例说明了这种理论，并发现了铜价在投资临界值与放弃临界值之间非常大的波动范围。

我们还考虑了中间情形，即暂停与废弃两者在不同成本水平上都可能暂停的项目需要一定的额外支出，例如，船进坞修理，但重新起动该项目则是廉价的。放弃修理节约了维修费，也可能带来一定的瞬时废弃成本(scrap value)，但如果潜在利润恢复，那么企业必须承受全部投资成本。现

在，我们必须在三种方案之间决定最优变换：一家停工的企业、一个正在运营的项目和一个暂停的项目。我们确实是这样做的，并用原油油轮的例子说明了这一点。

1.4.6 临时雇用与永久雇用

尽管在本书中我们主要关注企业的资本投资选择，但类似的考虑也适用于企业的雇用和解雇决策。这些选择中的每一种都有沉没成本，每种决策必须在不确定环境下作出，而且每种决策都考虑了时机选择的一定自由。因此，前面的观点和结论仍然适用。例如，只有当劳动力的边际产出充分高于其工资水平时，新职工才会得到雇用；沉没成本越大或不确定程度越高，所需的高于工资的余额或倍数也越高。

1993 年中期的美国劳动力市场提供了这种理论起作用的一个生动的实例。当经济从 20 世纪 90 年代早期的萧条中复苏时，企业利用加班或雇用临时工的方法来提高产出，即使对技术要求高的职位也是如此，但全职新职工的长期雇用却增加得非常慢。企业盈利能力的当前水平一定很高，因为企业愿意对工人加班的工作支付相当于其工资水平 50% 的加班费，并且愿意利
16 用提供临时工并征收工资的 25% 甚至更高费用的代理机构，但这些企业却不愿意签署包括了新固定职工雇用条款的协议。[5]我们的理论为这些发现提供了一种自然的解释。当时，未来需求和未来成本的高度不确定性仍然占主导地位，经济复苏的稳定性及持久性仍然不明朗。人们担心通货膨胀还会回来，会导致美联储提高利率。未来的税收政策极不确定，雇主必须承担的未来健康保障成本的水平也是如此。因此，我们可以预期，在增加正式的全职工人之前，企业会非常小心谨慎，并等待着高水平盈利能力的持续前景的更多保证。同时，企业宁愿采用不可逆程度较低的（即使成本比较昂贵）生产方式，即加班或雇用临时工来利用当前的盈利机会。这正是我们所看到的。

1.4.7 滞后作用

当我们同时考虑投资与废弃（或进入与退出）时，企业的最优决策由两个临界值来刻画。与超过沉没成本的正常回报率相对应，当前充分高的利润水平表明企业投资或进入是合理的，而充分高的损失水平导致企业废弃或退出。现在假定利润的当前水平位于这两个临界值之间的某一水平上，我们能否发现投资的企业？这取决于利润波动的最近经历。如果利润在当前中间水

平上，这一水平是从引起进入的高水平上刚刚降下来的，则存在一家投资的企业。然而，如果这一中间水平是从引起退出的低水平上刚刚升上来的，则不存在活动的企业。换句话说，潜在的随机变量的当前状态并不足以决定经济的产出，它需要一段较长的时间才能决定。这种经济是**路径依赖**（path dependence）的。

最近有人考察并举例说明了路径依赖的观点，特别突出的是阿瑟（Arthur，1986）和戴维（David，1985，1988）的论文。他们考虑了更极端的可能性：甚至经济系统的长期特征也会因为初始条件的微小变化而改变。这里我们采用了路径依赖的一种更温和的类型。经济系统可能状态的长期分布是不可改变的，但是其短期和中期演化仍然会受到初始条件的巨大影响。

路径依赖可导致下面的事件序列的发生。当企业第一次到达现场并准备 17
投资时，当前的利润位于两个临界值之间的中间区域，因此企业决定等待；当利润上升到超过临界上限时，企业投资；最后利润下降到它原来的中间水平，这种下降不会把它带到发生废弃的临界下限。这样，背后的动因（当前的盈利能力）已经恢复到其原有水平，但是其影响（投资）不会恢复。

在物理学及其他学科中，类似的效应早已为人熟知。最相似的例子来自电磁学。拿一根铁棒并把绝缘线沿着铁棒绕成圈，通过电线输入电流，铁棒就被磁化了。现在关掉电流，磁力并不会完全消失，剩余效应仍然存在。原因（电流）是暂时的，但它留下了更持久的效应（被磁化的电磁棒）。

这种现象被称为时滞作用（Hysteresis）。通过类比，当潜在的因素完全恢复时投资决策却不能恢复它们自身，可以称之为经济的时滞作用。一个引人注目的例子发生在20世纪80年代。1980—1984年，美元价值相对于其他货币急剧上升。在美国市场中外国企业的成本优势变得非常大，最终导致美国进口的大幅上扬。接着美元价值急剧下跌，到1987年已降到了1980年时的水平。然而，进口渗透并没有完全恢复。事实上，它根本就没有下降。为了得到任何明显的进口缩减，美元必须有更大幅度的下降。

1.4.8 产业均衡

在第8章和第9章，研究中心从企业投资决策转向由许多相同企业所组成的整个产业的均衡。人们的第一反应可能是企业之间的竞争将破坏任何一家企业的等待期权，消除我们在第5章～第7章中所发现的不可逆性和不确定性。竞争确实会破坏每家企业的等待期权，但这并没有修复现值方法和传

统理论的结论。相反，由于某些不同的理由，在作出不可逆决策时小心谨慎仍然是重要的。

考虑一家准备进行投资的企业，它知道本产业的未来需求方向及企业自身成本都是不确定的，而且它知道有许多其他企业面临着类似的不确定条件下的类似决策。企业最终关心的是为追求自身利益的决策的结果，但它必须认识到其他企业的类似决策将如何影响这一结果。从这个角度来看，必须区
18 分两种类型的不确定性，因为它们对投资有不同的含义：影响产业内所有企业的总体不确定性，及每一企业所面临的特殊的不确定性。

为说明这一点，首先假定投资是完全不可逆的，并考虑产业范围内需求的增加。若任意一家企业预料到这种情况将导致价格更高，从而将改善其自身的利润前景，这使投资更有吸引力。然而，还应当意识到，其他一些企业也在做类似的计算。它们的供给反应将会减轻需求移动对产业价格的影响。因此，产业自身的潜在利润的向上移动就不会像只有一家企业而且其在投资机会上拥有垄断能力的情形下那么高。然而，由于投资是不可逆的，产业需求的一个向下的移动，在完全竞争的条件下与垄断情形下刚好有相反的效应。尽管其他竞争性企业同样受到严重影响，它们并不能退出以缓解价格下降。这样，对不确定性的竞争性反应具有内在的不对称性：需求向下的移动比其向上的移动显示出更强有力的影响。这种不对称性使每一个企业在作出不可逆投资时都小心翼翼。最终的效应非常类似于企业拥有对投资机会的垄断能力并等待执行的期权价值，而且在一些模型中是相同的。事实上，在给定每家企业的投资期权后，像第 5 章～第 7 章中那样评价这些实物期权、加入这一期权应当为零的竞争性均衡条件，可以推导出竞争性产业的投资理论。

如果我们考虑一定的可逆性，其他企业的退出确实缓和了逆向需求对价格的冲击效应。但是在初始的恶劣环境下，每家企业的退出决策都考虑到了这种需求冲击的不对称效应：需求向上的影响要比其向下的影响更强大。这样，当竞争性企业在经营中开始出现损失时，它们不会马上离开，而是等待一会儿，以弄清事情是否会改善或其对手是否会离开。全部的影响就像我们在第 7 章中所发现的单一垄断企业的放弃决策。事实上，我们在第 8 章中所分析的总需求冲击下联合进入与退出决策的竞争性均衡模型中引起进入与退出的高价格与低价格，实际上与第 7 章中相应的垄断模型中引起进入与退出的价格有相同的临界值。

特定企业的不确定性不会导致这种不对称。如果只有一家企业经历了其

需求的有利移动，比如一些特殊的时尚变化，则它知道这种利好消息不会被其他企业系统性地分享，因而它并不担心其他企业的进入会以相同的方式侵蚀其盈利能力。然而，等待的价值将以原先熟悉的形式再现。这家幸运的企业
在以其低成本进入方面确实存在垄断能力，因此它还拥有等待的期权价值。 19
如果其低成本被证明是短暂的，它可以避免损失。这样，在产业均衡中特定企业的不确定性也导致类似于第5章～第7章中所发现的独立企业的投资决策。

1.4.9 针对投资的政策

一些读者可能把不确定性使企业不太热心于投资的结果解释为需要政府政策干预来激励投资的一种信号。这是一种非常草率的反应。社会计划人员也会通过等待获得信息，因此也会意识到项目中沉没资源的机会成本。只有当企业而不是整个社会作为整体面临等待的不同价值时，换言之，即某些市场失灵与决策过程相联系时，政策干预的情形才会产生。

第9章集中讨论了这些问题，我们的第一个结论是一般均衡的标准理论的证明。如果风险市场是完全的，而且企业作为完全的价格接受者行事（在这种动态随机背景下，这必须理解为表示每家企业接受给定的价格随机过程且对价格有理性预期），那么，产业的均衡演化就是社会有效的。社会计划人员在作出其投资决策时将显示出相同程度的犹豫不决。

如果风险市场是不完全的，有利的政策干预确实存在，但是正确的政策需要一些细致的计算和实施。经常用于处理不确定性的粗率的工具可能会有反向影响。我们通过考察价格上限与下限的影响举例说明了这一点。例如，价格支持通过减少价格下降的风险推动了投资，然而最终向右移动的产业供给函数表示了在好时段较低的价格。将好时段与坏时段的价格进行平均，我们发现，总体的结论是较低的长期平均价格。换句话说，制定出来用于帮助某集团的政策却刚好对该集团有害。价格下限或上限政策，例如城市租金控制与农业价格支持，经常会受到批评，因为它们降低了整体经济效率。我们的发现也许是在政治上反对这些观点的更强有力的论据：它们的分配效应也是不正常的。

我们还研究了关于未来政策自身不确定性的影响。例如，如果讨论一种投资的税收减免，企业将意识到等待有更高价值，因为存在企业的投资成本
下降的可能性。我们发现，这种政策不确定性对立即投资有强大的阻碍效 20
应。如果政府愿意刺激投资，也许它们所能做的最坏的事情就是花费很长时

间来讨论这种做法的正确方式。

1.4.10 反托拉斯与贸易政策

第8章和第9章描述了一种与人们熟悉的中级微观经济学教科书中的竞争性均衡差别很大的一种框架。在中级微观经济学中，我们被告知，如果价格上升到等于长期平均成本，企业将进入该产业；如果价格下降到低于平均可变成本，企业将退出该产业。我们的理论表明，在这两个方向上有一个更宽泛的价格变动范围。例如，在面临总体不确定性时，只要求价格上升到长期平均成本水平，企业在此时进入不能形成产业均衡。每家企业都知道，其他类似企业的进入会使过去一直在上升的价格停止上涨，而未来不利方向的变化将推动价格低于这一水平。而且，有时达到长期平均成本甚至低于这一水平的未来价格变化路径可能永远不会为企业的投资提供正常回报。只有当由进入所施加的价格上限大大高于长期平均成本时，才能使超过正常利润及低于正常利润的平均达到正常回报。类似地，当价格充分下降到远远低于平均可变成本时，企业才会退出，企业将承受一定损失。其他企业的退出使价格的下限更低，这一下限的均衡水平由算出的未来损失与收益的平均值为零所决定。

因此我们发现，即使在长期不确定条件下的竞争性均衡也不是稳定状态，而是价格可以大幅度波动的动态过程。超常利润的周期会随着损失周期的改变而改变。将动态均衡看做随机过程的类似观点在宏观经济学中早已非常普遍，但是在微观经济学中却少得令人吃惊，特别是关于其对反托拉斯政策或国际贸易政策的意义。这些政策的概念性框架通常是静态的，但实践中的建议是以特定时刻对一种产业的简单印象（snapshot）的观测为基础的。我们发现，动态观点要求重新深入地思考理论和实践两方面的结论。

例如，在产业组织理论中，超额利润意味着合谋或进入壁垒，这要求反托拉斯行动。在我们的动态观点中，在没有新进入者的条件下超常利润的大量周期也能形成，即使所有企业都是小的价格接受者也是如此。在国际贸易
21 中，当外国企业以损失为代价继续它们的出口经营时，国内企业会指控外国企业掠夺性倾销，并要求征收抵消进口关税[①]的标准的贸易政策反应。然而，我们的分析表明，外国企业可能仅仅是理性地保持其未来在我们市场中的经营期权才有活动的，而没有任何掠夺性动机。只有当数据是一个充分长

① 抵消进口关税是指对接受过补贴的进口商品所征收的一种附加税。——译者注

的时间序列时，我们才能检验假想的合谋或掠夺行动仅仅是竞争性产业演化的自然阶段还是真正的竞争失灵。

1.4.11　序列投资与增量投资

在第10章和第11章，我们回到单个企业的投资决策并考察企业投资决策应用中其他一些非常重要的观点。第10章研究了由多个阶段组成的投资，在产生任何产出流或利润流之前，所有的投资阶段必须依次完成。这家企业能经常看到未来潜在利润的一些指标，而这些指标是随机波动的。在任何阶段，企业都可能决定立即继续投资，或者等待改善的条件。在投资序列的早期阶段，大部分成本仍然是沉没的。因此，只有当企业看到盈利指标充分高的临界值水平时，它才会继续对项目投资。完成的步骤（阶段）越多，沉没成本也越低，只需更小的临界值，进行下一步就是合理的。在这个意义上，过去的决策会影响未来的决策。

在第10章，我们考察了当前决策对未来的另一种影响，即学习曲线。根据这种理论，任一时刻的生产成本都是累积的产出经历的一个递减函数。这样，当前的产出流对未来全部生产成本的下降有贡献。在将当前收益与当前生产成本进行比较以决定最优的产出水平时，这一额外的价值必须加到当前收益中。我们考察了在这些条件下的动态产出路径。我们发现，不确定性程度越高，未来成本下降的价值越低，而这将导致投资速度的下降。

在第11章，我们转向对增量投资的研究，其中产出流与利润流在全部时间内都是已安置资本存量的函数。这一章的目的是描述生产能力扩张的最优政策的特征。当生产显示出资本回报递减时，我们可将新增的每单位生产能力看做一个全新的项目，自被安装之日起，它就开始贡献其边际产出。因此，第6章推导出的关于这种项目的投资标准仍然适用。如果产出在某一时 22
段显示出递增的资本回报，那么，在适当构造的区间内，所有的单位生产能力都得当做一个单一项目，而其安装的标准是第6章所描述的单一项目下的标准的很自然的推广。

当企业可以选择其生产能力的扩张速度时，我们必须说明这种扩张的成本如何取决于扩张的规模及速度。在这方面的不同假定意味着不同的最优政策。我们构造了一个考虑到前后变化的一般模型，并特别说明了作为过去十年间理论研究和实证研究支柱的成本调整模型与作为本书中心的不可逆方法之间的联系。

1.4.12 实证研究与应用研究

在第 12 章，我们转向一些例子，举例说明了本书详细论述的知识的应用及推广。我们还讨论了投资行为的实证研究的理论意义。

在第 12 章，我们首先考虑有关石油公司巨大利益的问题：如何评价未开发的近海油田的价值，以及如何决定何时投资于油田的开发与生产。正如我们将要看到的，一个未开发的储备实质上是一种期权，它赋予其所有者投资于储备的开发并生产石油的权利。通过评价该期权，我们可以为储备定价，并决定何时开发它。石油公司经常为近海油田花费上亿美元，因此，决定如何为它们估价并尽可能好地开发利用它们是非常重要的。

然后，我们转向电力设施的投资时机问题。《空气清洁法》要求减少二氧化硫的总体排放量，但是要最小化减少排放中的成本（该法赋予电厂一种选择），电厂可以投资于昂贵的“毛刷”从而把排放减少到法律要求的水平，或者可以购买能上市交易的“许可证”，这种许可证允许它们排放污染。许可证的未来价格有非常高的不确定性，而且对毛刷的投资是不可逆的。电厂必须决定是依赖于许可证保持排放的灵活性还是对毛刷投资。我们说明了这一问题如何能利用本书中的期权方法得到解释。

为说明本书中所论述的原则和工具所具有的影响不仅仅局限于企业投资决策，我们探讨了公共政策中的一个问题：假定政策的未来成本和收益是不确定的，政府应当在何时采纳一项旨在对环境威胁作出反应的政策？我们将证明，经济学家习惯的传统上用于评价环境政策的标准的成本—收益框架是不完善的，其理由是经常存在与环境政策相联系的重要的不可逆性。这些不
23 可逆性的产生可能与环境危害本身有关，也可能与降低危害的政策中的适应成本有关。由于环境政策的采纳几乎是一种勿失良机的命题，研究最佳投资时机中所使用的相同技术可以应用于对环境政策的最优时机的研究。

在第 12 章结尾，我们讨论了投资行为的不可逆性和不确定性的一些实证意义。有大量的轶闻式的证据表明，企业作出投资决策的方式至少与本书所详细论述的理论大体一致。例如，对明显高于由资本资产定价模型所预测的资本机会成本的最低预期资本回报率的使用，以成本和不确定性的合理参数为基础，我们找到了再现现实特征的一些数值模拟。然而，对这种理论的更系统的计量经济学检验为时尚早。我们评述了一些此类工作，指出了其困难，并提出未来研究的方向。

1.5 非经济中的应用

本书的中心是企业的投资决策及其在产业均衡中的意义。这些事情是经济学家们最感兴趣的，它们的条件（技术及资源的可得性）和标准（企业价值最大化）是普遍为人接受的，理论引致了对它们的数量预测。消费者（购买耐用品）和工人（教育与人力资本）的投资决策有明显的类似结果。对这些问题的研究早已有之，我们将在第12章浏览一些有关文献。

许多其他的个人选择和社会选择是在相同的基本条件下作出的，即不可逆性、正在发生的不确定性及选择时机上一定的回旋余地。因而我们可以根据前面所概括的一些模型和结论来考虑它们，并提供一些定性的推测。我们认为，沿着这些线索还存在更严格研究的余地。通过加入期权价值，这需要更深入的工作，就像贝克尔（Becker，1975，1980）将经济方法用到社会现象一样。实际上，对这种观点的一些认识可以在贝克尔自己对这一主题的解释中看到，例如贝克尔（Becker，1962，pp.22－23）在1962年的论述，但是沿着这些线索更全面、更正规的分析在未来仍然是潜在的富有成果的项目。尽管我们不能在这本已经很厚的著作中占用更多的篇幅，但是我们相信，沿着这些线索，读者将发现一些既有趣又发人深省的想法。

bbs.miaogu.com

1.5.1 婚姻与自杀 24

婚姻需要求爱期的巨大成本，而离婚则有其自身的货币和情感成本。婚姻带来的幸福或痛苦在结婚前仅仅是不完全的预测，即使在结婚后也会持续地随机波动。因此，等待更好的伴侣具有期权价值，而且我们可以预期未来伴侣。为证明结婚是合理的，必然会设定充分高的“门当户对”的初始临界值。我们还预期，在婚姻的可逆性不强的宗教和文化中，婚姻的期权价值更高。因此，当其他条件相同时，在这种社会中的个人将更仔细地搜寻伴侣（一般来说，搜寻时间更长），而且坚持伴侣的质量更高的临界值。相反，当离婚容易时，我们将发现伴侣们会更轻易地结婚（或类似的安排）。

当然，其他条件并不是相同的，使离婚更困难的社会大概会把更高价值加在婚姻上。因此，我们可以预期，通过提供更高的“配对技术”，它们将消除因社会压力引起的个人理性搜寻及延误。为区分个别的且经常是对立的影响，对这些观点的经验检验将不得不仔细设计，但是这只提高了此类研究

的趣味和挑战。

经济学应用于社会学现象的最极端例子也许是由哈默马什和索斯(Hamermesh and Soss, 1974)所论述过的贝克尔的自杀理论。根据他们的观点，当一个人剩余生命的效用的预期现值下降到低于某一标准或减去该标准后为零时，他将结束自己的生命。大多数人对此所作出的反应是认为该模型给出了本质上是非理性行动的一种过度理性的观点。我们的理论正好表明了相反的观点。无论所描述的理论有优点或缺点，从所描述的观点出发，哈默马什-索斯模型还不够理性，因为它忘记了保持生命力的期权价值。自杀是完全不可逆的行动，而未来有许多正在发生的不确定性。因此，等待以便察看某些事情是否会改善的期权价值应当是非常高的。这样，境况必定比哈默马什-索斯模型中调整扣动扳机的关闭标准更黯淡。即使生命的预期方向仍然是向下的，这也是正确的；所有这些所必需的是向上的一些正概率。

现在回到这样的观点，即大多数自杀者是非理性的，并弄清楚到底他们如何在变得理性时失败了。这里有几种可能性，但有一个似乎特别恰当。自
25 杀将现在的沮丧扩散到未来，而忽略了不确定性，因而也忽略了生命的期权价值。反对自杀的宗教或社会禁忌作为补偿这种在理性上失败的测度发挥了有用的功能。通过提高这种行动的已认识到的成本，当期权价值被忽略时，这些禁忌降低了导致自杀的生命质量的临界值。这可能纠正个人预见方面的失误，并使他们的临界值与认识到的期权价值的最优规则相一致。

1.5.2 法制改革与宪法

最后，我们考虑法律改革。不同的基本宪法或法律原则在特定的环境下经常相互冲突。例如，被告人的民事权利经常会阻碍法律与秩序的更好执行。关于与这些相互冲突的原则相联系的相对权重的公共观点可能随时间推移而改变。法律应当怎样快速地对最近的观念变化作出反应？考虑到改变法律的一些立法成本和行政成本，我们的理论表明，选择等待并观察观念的趋势本身是否可逆有一定的价值。改革应当被延迟，直到当前观念的压力足以抵消这一价值。但是有好的理由相信，这一过程从属于一种短视或“政治市场失灵”。一直以来，人民和政治家们似乎相信，最终它们将恢复正常，已经达到的观念间的平衡将永远保持。因此，他们将忽略未来的不确定性和选择权价值，并过于频繁地改变法律。

预期及战胜这种趋势的时机是在宪法构造时。考虑到后代在改变法律时将过于好战，建立者可以人为地提高改变的成本，从而使立法改变的政治性分裂的临界值与实际的最优临界值相符合。这样，绝大多数人改变宪法的各种要求可看做是纠正后代人短视的一种承诺机制。

这些只是本书所阐述的理论和技巧如何适用于一些非常广泛的问题的一些例子。我们已经以深思熟虑和激动人心的方式谨慎地加以阐述，希望能吸引来自更多的社会科学家沿着这些线索进行研究。在本书的其余部分，我们主要集中于投资，但希望读者能记住理论的更宽泛的潜在适用性。

【本章注释】

[1] 一些与投资相对立的决策（以未来不确定的成本为代价获得瞬时收益）也是不可逆的。突出的例子包括自然资源的耗竭及热带雨林的破坏。我们的方法也适用于这些决策。

[2] 萨默斯(Summers,1987,p. 300)发现，最低资本回收率在8%～30%之间变动，中位数为15%，而均值为17%。无风险资本的成本非常低；考虑到利息支出的税收豁免，名义利率为4%，实际利率则接近于零。同时还可参见德陶查斯等人（Dertouzas et al.，1990，p. 61）的论述。适用于有系统性风险的投资的最低资本回报率将超过无风险利率，但是还没有大到足以调整许多公司所用到的数值。

[3] 参见吉尔伯特（Gilbert，1989）和泰勒尔（Tirole，1988，Chap. 8）对这种战略性投资观点的文献综述。

[4] 关于成长期权作为企业价值源泉的讨论参见迈尔斯（Myers，1977）、凯斯特（Kester，1984）和平迪克（Pindyck，1988b）的论述。

[5] 1993年5月16日，星期日，这一天出现在《纽约时报》（*New York Times*）上的两篇文章描述了这些情况："工厂依靠加班费，职位空缺更加少"和"经济虚弱，专业人士也成了临时工"。

上海老股票论坛 6bs.miaogu.com

第2章 通过简单例子阐释概念

上善若水股票论坛
bbs.mjiaogu.com

企业随时间推移连续地作出和推行投资决策，有时修正其投资决策。因此，本书的大部分篇幅致力于把投资决策作为连续时间问题的分析。然而，最好是由一些简单的例子开始，涉及最少的数学知识，其中投资决策是在时间上的2～3个离散点作出的。沿着这个思路，我们可以从直觉性的理解开始传达基本概念。特别地，我们希望证明，投资开支的不可逆性如何影响投资决策，以及它如何需要对商学院普遍讲授的标准的净现值规则进行修正。我们还想证明，投资机会如何像金融期权，而且可以根据它来定价和分析。

本章首先以一个简单例子为背景讨论这些观念，其中投资决策只能在两种可能的阶段（现在或下一年）作出。我们将利用这个例子来审视当

项目的未来价值不确定时不可逆性如何创造了投资中的机会成本，以及在作出投资决策时这种机会成本如何能得到考虑。我们还将证明，如何能利用基本的期权定价技术来分析投资决策。我们将详细考察企业投资期权的特征，并且观察该期权的价值及投资决策如何取决于项目未来价值的不确定性程度。这个例子将被扩展到第三阶段以便提供对投资时机问题的更深入的洞察，并且确定连续时间里投资问题模型化的阶段。最后，我们将简要考察当 27
投资成本（对应于其回报）不确定时、未来利率不确定时及个人必须选择投资规模时的投资决策。

2.1 两阶段下的价格不确定性

考虑一家正决定是否对某种虚拟产品①进行投资的企业。投资完全是不可逆的——工厂仅能被用于生产该种虚拟产品，而且如果该虚拟产品的市场消失了，企业不能“停止投资”并收回其支出。为使事情尽可能简单，我们假定工厂能以成本 I 在瞬间建成，而且每年将永远生产 1 单位的虚拟产品，营运成本为 0 美元。目前虚拟产品的价格为 200 美元，但下一年价格将改变。它上升到 300 美元的概率为 q、下降为 100 美元的概率为 $1-q$。然后价格将永远保持在这一新水平上（见图 2—1）。

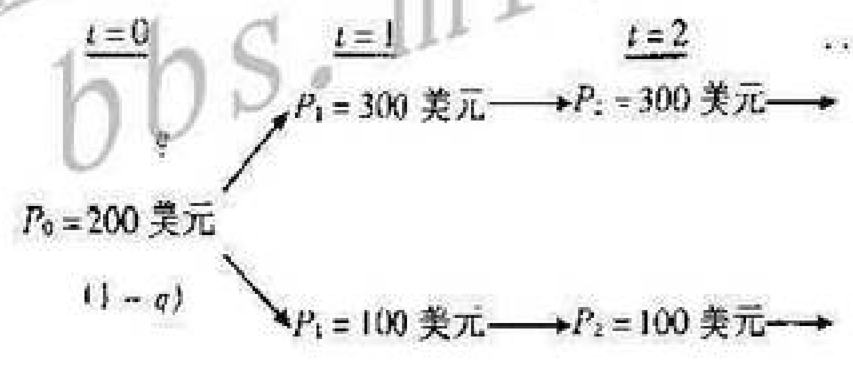


图 2—1 虚拟产品的价格

另外，为简化起见，假定虚拟产品未来价格的风险可以完全分散（即它与整体经济所发生的事情无关）。因此，该企业可以利用无风险利率来贴现未来现金流，这里我们采用 10%。

暂时地，我们令 $I=1\,600$ 美元，$q=0.5$（以后我们将弄清投资决策如

① 虚拟产品是指具有一般产品特征的一种在现实中并不存在的产品。——译者注

何取决于 I 和 q)。这是一种好的投资吗?企业应当现在就投资,还是最好等一年并观察虚拟产品的价格会上升还是下降?假定我们现在投资。以标准
28 的方式来计算这一投资的净现值(而且注意到虚拟产品的未来预期价格永远为 200 美元),我们有

$$NPV = -1\,600 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1.1)^t}$$
$$= -1\,600 + 2\,200 = 600(\text{美元}) \qquad (2-1)$$

显然本项目的净现值为正。虚拟产品工厂的当前价值,我们记作 V_0,等于 2 200 美元,超过了虚拟产品工厂的成本 1 600 美元。因此,似乎我们应当进行这项投资。

然而,结论是不正确的,因为前面的计算忽略了一种成本,即现在投资而不是等待并保持在价格下降时不投资的可能性的机会成本。为弄清这一点,让我们再算一遍该项目的净现值。这次假定现在不投资,等一年后,只有虚拟产品的价格上升时才投资(只有价格上升时才投资实际上是事前最优的情形)。在这种情形下,净现值由式(2-2)给出[1]:

$$NPV = (0.5)\left[\frac{-1\,600}{1.1} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{300}{(1.1)^t}\right]$$
$$= \frac{850}{1.1} = 773(\text{美元}) \qquad (2-2)$$

注意,在第 0 年,没有支出和收益。在第 1 年,只有当价格上升到 300 美元时才会花费 1 600 美元的成本,其发生的概率为 0.5。如果我们在决定是否对该厂进行投资之前等待一年,则现在项目的净现值为 773 美元;而如果我们现在就投资于该厂,则其净现值为 600 美元。很明显等待比立即投资更好。

如果我们仅有的选择是现在投资或永远不投资,我们应当现在投资。在这种情形下,没有等待一年的选择,因而没有取消这样一种期权的机会成本,因此标准的净现值规则仍适用。如果下一年虚拟产品的价格下降时,我们能够不投资并收回 1 600 美元的成本,则现在就应该投资。把机会成本引入净现值的计算需要两个条件——不可逆性以及作为现在投资的替代的未来投资的能力。当然,存在企业不能等或者不能等太久的情形。(一个例子是对一家企业而言,预期进入该市场的某一竞争者的规模足够大;另一个例子是即将开发利用的专利或矿藏资源租约。)拖延的时间越少,拖延的成本越高,不可逆性对投资决策的影响也越小。当我们发展出更一般的投资模型时,我们将在本书后面的章节探讨这一点。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

拥有在下一年作出投资而不是现在就投资或永远不投资的灵活性的价值 29
有多大呢？（我们知道，拥有这种灵活性有一定的价值，因为我们可能选择等待而不是现在就投资。）这种“灵活性期权”的价值容易计算：它正好是两个净现值的差，即 773 − 600 = 173（美元）。换句话说，为获得灵活性的投资机会，我们愿意比只允许我们现在就投资多支出 173 美元。

考察灵活性价值的另一个途径是回答下面的问题：为获得灵活的投资机会而不是死板的“要么现在投资，要么永不投资”的机会，我们愿意接受多高的投资成本 I？为回答此问题，我们找到 I 的价值，这里记作 $\bar{I}$，使等待时的项目净现值等于 $I=1\,600$ 美元的净现值及现在就投资时的净现值，即等于 600 美元。将式(2−2)中的 1 600 美元替换为 I，773 美元替换为 600 美元，有

$$NPV=(0.5)\left[\frac{-\bar{I}}{1.1}+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{300}{(1.1)^t}\right]=600(\text{美元}) \qquad (2-3)$$

对 $\bar{I}$ 求解，可得 $\bar{I}=1\,980$ 美元。换言之，当且仅当现在以 1 600 美元的成本建立虚拟产品工厂的机会与现在或下一年以 1 980 美元的成本建立虚拟产品工厂的机会有同样的价值。

最后，假定存在虚拟产品的期货市场，而且从现在至交割那一年的期货价格等于预期的未来现货价格，即 200 美元。[2]期货市场上的套利能力会改变我们的投资决策吗？特别地，它会导致我们现在就投资，而不是等一年吗？答案是否定的。为说明这一点，考虑现在投资，并通过远期合约规避价格风险。为规避所有价格风险，我们需要 11 种虚拟产品的卖空期货，这实际上将抵消下一年项目净现值中的任何波动。（如果虚拟产品的价格上升到 300 美元，我们的项目将值 3 300 美元，但是我们在期货合约中将失去 1 100 美元；如果价格下降为 100 美元，我们的项目将仅值 1 100 美元，但是我们将从期货市场中获得额外的 1 100 美元。无论何种方式，我们最终获得的项 30
目净值为 2 200 美元。）但是这也意味着我们的项目现在的净现值为 600 美元（2 200 美元减去 1 600 美元的投资成本），实际上就是无套利时的价值。[3]

因此，套利没有收益，而且等待到下一年作出投资决策对我们的境况依然是比较好的。这一结论是莫迪利安尼-米勒（1958）定理的一种变形。在期货市场中的运作仅仅是金融政策的一种形式，不包括破产可能性，它对企业投资决策或投资机会的价值没有实际影响。

2.1.1 金融期权的类推

投资机会类似于普通股的看涨期权，它赋予我们作出投资支出（期权的执行价格）并获得一个价值随机波动的项目（股票）的权利（不需要我们执行）。在上述的简单例子中，我们拥有一种称为“实值”的期权，意思是如果它现在执行，它产生的净回报为正（被称为“虚值”的期权是指如果现在执行它，产生的净回报为负）。我们发现，即使期权是“实值”，等待而不是现在就执行它更好。在下一年，如果价格上升到 300 美元，我们将通过支付 1 600 美元执行我们的期权，并获得价值为 $V_1 = 3\,300$ 美元 $= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{300}{(1.1)^t}$ 的资产。如果价格下降到 100 美元，这项资产仅值1 100美元，因此我们不会执行该期权。

我们发现投资机会的价值为 773 美元（假定当前决策实际上可以在下一年作出）。利用标准的期权定价方法重新计算这一价值将是有益的，因为后面我们将利用这种方法来分析其他投资问题。

为此，令 F_0 表示投资机会现在的价值，即为拥有投资于虚拟产品工厂的期权我们愿意现在支付的金额。并令 F_1 表示下一年这一投资机会的价值。注意到 F_1 是一随机变量，它取决于虚拟产品的价格变化。如果价格上涨到 300 美元，则 F_1 将等于 $\sum_{t=0}^{\infty} \frac{300}{(1.1)^t} - 1\,600 = 1\,700$ 美元；如果价格下降到 100

31 美元，将不执行投资期权。在这种情形下，F_1 将等于零。这样我们就知道了 F_1 的所有可能值。这里的问题是找到 F_0，即当前期权的价值。[4]

为求解这个问题，我们将创建有两种成分的一种投资组合：投资机会本身及一定数量的虚拟产品。我们将选择虚拟产品的数量，以使投资组合是无风险的，也就是使投资组合在下一年的价值与虚拟产品价格的升降无关。由于投资组合将是无风险的，我们知道个人能够从持有该组合中所获得的回报率必须是无风险的利率。（如果投资组合的回报率高于无风险利率，套利者可以通过在无风险利率水平上借款并购买资产组合，从而获得无限的货币数量；如果投资组合的回报率低于无风险利率，套利者通过卖空投资组合并在无风险利率上投资于基金来获利。）通过设定投资组合的回报率等于无风险利率，我们可以计算投资机会的当前价值。

特别地，考虑人们持有投资机会并卖空 n 个虚拟产品的一个投资组合。（假定虚拟产品是一种可交易的商品，如石油，通过从其他生产者那里借款，或通过在期货市场中卖空，人们可以获得空头。然而在那一刻，我们没必要

上善若水股票论坛 bbs.mlaogu.com

关心这一投资组合的实际执行情况。）这一投资组合的现在价值为 $\Phi_0 = F_0 - nP_0 = F_0 - 200n$。下一年投资组合的价值为 $\Phi_1 = F_1 - nP_1$。这取决于 P_1。如果 P_1 为 300 美元，则 $F_1 = 1\,700$，$\Phi_1 = 1\,700 - 300n$。如果 P_1 为 100 美元，则 $F_1 = 0$，$\Phi_1 = -100n$。现在让我们选择 n，使投资组合是无风险的，即 Φ_1 与价格的变化无关。为实现这一点，令

$$1\,700 - 300n = -100n \tag{2-4}$$

或者 $n = 8.5$。以这种方式选择 n，不论虚拟产品的价格上涨到 300 美元还是下降为 100 美元，$\Phi_1 = -850$。

现在让我们计算持有这种投资组合的回报。这种回报是资本收益 $\Phi_1 - \Phi_0$，减去持有空头时必须进行的支付。由于虚拟产品的资本收益的预期回报率为零（下一年的预期价格为 200 美元，与这一年的价格相同），理性的投资者不会持有多头，除非他或她预期至少可以获得 10% 的回报率。因此，卖空虚拟产品所需的支付为每年每一产品 $0.1P_0 = 20$ 美元。（这与卖空一种 32
支付红利的股票相似；空头需要支付红利，因为没有理性的投资者会在不能获得红利的条件下持有弥补性的多头。）我们的投资组合有 8.5 单位产品的空头，因此，它不得不付出 170 美元。所以，在一年内持有该组合的回报为

$$\begin{aligned}\Phi_1 - \Phi_0 - 170 &= \Phi_1 - (F_0 - nP_0) - 170\\ &= -850 - F_0 + 1\,700 - 170\\ &= 680 - F_0\end{aligned}$$

因为这一回报是无风险的，我们知道它必须等于无风险利率，这里我们已经假定为 10%，乘以组合的初始价值 $\Phi_0 = F_0 - nP_0$，即

$$680 - F_0 = 0.1(F_0 - 1\,700) \tag{2-5}$$

这样，我们得出 $F_0 = 773$ 美元。注意到这与以前在决定是否投资之前遵循等待一年的最优策略的假设下所计算出来的投资机会的净现值是一样的。

我们已经发现，投资机会的价值，即投资于该项目的期权价值是 773 美元，现在投资（执行期权）的回报为 $2\,200 - 1\,600 = 600$ 美元。但是一旦我们投资，则期权就消失了，因此 773 美元是投资的机会成本。这样，现在投资的全部成本为 $1\,600 + 773 = 2\,373$ 美元 $> 2\,200$ 美元。作为结论，我们将等待并保持期权有生命力，而不是现在投资。我们获得的结论与通过比较净现值的结论一样。然而，这一次我们计算了投资的期权价值，并且明确地将它考虑为投资成本的一部分。

我们对投资期权价值的计算是建立在无风险投资组合的构造上的，这需

上善若水股票论坛 bbs.niaogu.com

要一种可以交易的（多头或空头持有）虚拟产品。当然，我们也可以利用一些其他的资产或资产组合来构造投资组合，该组合的价格必须与虚拟产品的价格完全相关。但是如果人们不能交易其产品且没有其他资产可以“消除”虚拟产品价格的风险时会怎么样？在这种情形下，人们仍能像我们在开始时所做的那样计算投资的期权价值，即计算每种投资策略的净现值（现在投资或等一年价格上升时再投资），并且挑选出能带来最高净现值的策略。这实
33 质上是动态规划的方法。在这种情形下，它恰好给出了同样的答案，因为所有的价格风险是可分散的。在本书的后面章节，我们还将更详细地探讨期权定价与动态规划间的联系。

2.1.2 投资期权的特征

我们已经看到我们的投资决策如何类似于执行期权的决策，而且我们可以用与金融看涨期权定价几乎相同的方法来为投资期权定价。为进一步洞察投资期权的特征，让我们观察其价值如何取决于不同的参数。特别地，我们将决定投资期权的价值（和投资决策）如何取决于投资的直接成本 I、虚拟产品的初始价格 P_0 以及下期价格提高的概率 q。

1. 投资成本的变化

迄今为止，我们一直将投资成本 I 固定为1 600美元。如果 I 低于或高于这一数字，投资期权价值多少？通过采取与以前一样的步骤，我们可以找到答案。这样就很容易发现，获得无风险投资组合所必需的空头取决于 I，如式（2－6）所示[5]：

$$n=16.5-0.005I \tag{2-6}$$

投资期权的当前价格由式（2－7）给出：

$$F_0=1\,500-0.455I \tag{2-7}$$

式（2－7）给出了作为投资直接成本 I 的函数的投资机会的价值。前面已看到，若 $I=1\,600$ 美元，等一年再投资而非现在就投资会更好。是否存在使现在投资成为选定策略的 I 的值呢？

为回答这个问题，考虑只要投资的回报至少与全部成本（即直接成本 I 加上机会成本 F_0）相等，我们就应当现在投资。因为来自现在就投资的回报为 $V_0=2\,200$ 美元，如果 $2\,200>I+F_0$，则我们现在就投资。将式（2－7）中的 F_0 代入，只要

$$I+1\,500-0.455I<2\,200$$

则我们应当投资。这样，如果 $I<1\ 284$ 美元，人们就应当现在投资而不是等待。理由是，等待意味着放弃第一年的收益，而且失去的收益超过了调整资源的机会成本，而不是保持投资期权的存在。然而，如果 $I=1\ 284$ 美元，$F_0=916$ 美元 $=V_0-I$，则人们对现在投资或等到下一年再投资是没有什么差别的。(这也可以通过将现在投资时项目的净现值与等到下一年再投资时的净现值进行比较而得到。在两种情形下，净现值都为 916 美元。) 而且如果 $I>1\ 284$ 美元，等待可能会更好。

F_0 对 I 的依赖由图 2—2 说明。该图表明，期权的价值 F_0 以及来自现在就投资的回报 V_0-I，都是 I 的函数。对 $I>1\ 284$ 美元，$F_0=1\ 500-0.455I>V_0-I$，那么应当保持期权的活力，即在决定是否投资之前，我们应当等到下一年。然而，如果 $I<1\ 284$ 美元，$F_0=1\ 500-0.455I<V_0-I$，则现在就应当执行该期权，那么期权的价值正好等于其净回报 V_0-I。

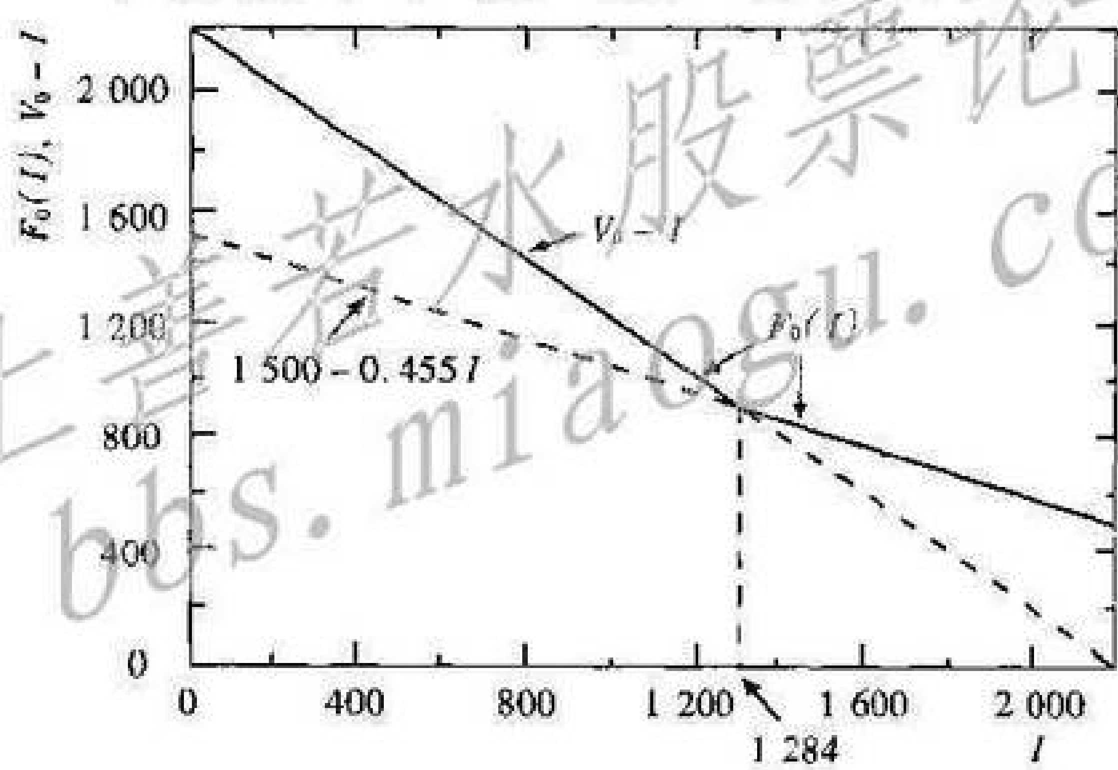


图 2—2　投资于虚拟工厂的期权

在期权术语中，当 I 很小时，来自立即投资的净回报变得非常大，或者说该期权是"很大的实值"。在充分大的临界点或临界值充分大时，等待的成本（瞬间利润的匮乏）超过了等待的收益（在发现价格是升高还是降低后作出最优决策的能力的价值），而且立即执行成为最优的。 35

2. 改变初始价格

让我们再一次将投资成本 I 固定为 1 600 美元，但现在改变虚拟产品的初始价格 P_0。为此，我们假定无论 P_0 怎样变化，下一年价格提高 50% 的

概率为0.5，价格降低50%的概率也为0.5（见图2—3）。

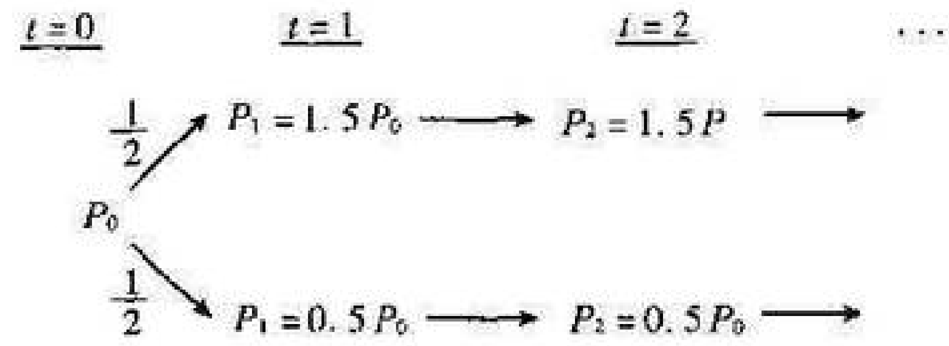


图2—3 虚拟产品的价格

为评估投资期权，我们再建立一个无风险的投资组合，其中我们持有投资期权，且能够卖空一定数量的虚拟产品。这一投资组合现在的价值为 $\Phi_0=F_0-nP_0$，其在下一年的价值取决于 P_1。虚拟产品工厂在下一年的价格为 $V_1=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{P_1}{(1.1)^t}=11P_1$，但如果其价值超过投资成本1 600美元时，我们才投资于工厂。因此，$F_1=\max[0,\ 11P_1-1\,600]$。假定 P_0 位于价格下一年上升到值得投资（即如果 $P_1=1.5P_0$）与下降到不值得投资的范围内（我们将马上考虑其他的可能性），那么，如果价格上升，$\Phi_1=16.5P_0-1\,600-1.5nP_0$；如果价格下降，则 $\Phi_1=-0.5nP_0$。设两种情形下的 Φ_1 相等，则使投资组合无风险的 n 的价值可由式（2－8）给出：

$$n=16.5-\frac{1\,600}{P_0} \tag{2-8}$$

注意到以这种方式选择 n，不论价格是升还是降，都有 $\Phi_1=-8.25P_0+800$。

现在，让我们计算这个投资组合的回报，注意空头所需要的回报为 $0.1nP_0=1.65P_0-160$，实际回报是 $6.60P_0-F_0-640$。由于回报是无风险的，它必须等于 $0.1\Phi_0=0.1F_0-1.65P_0+160$。解出 F_0，给出投资期权的价值：

$$F_0=7.5P_0-727 \tag{2-9}$$

假定只有当价格在下一年上升时我们才会投资，我们已经计算出投资期权的价值。然而，如果 P_0 足够低，则我们永远不会投资；如果 P_0 足够高，则现在就投资要比等待更划算。低于什么价格时我们永远不会投资呢？由上面的方程我们发现，当 $7.5P_0=727$ 美元，或者 $P_0=97$ 美元时，$F_0=0$。

如果 $P_0<97$ 美元，V_1 将小于投资成本1 600美元，即使价格在下一年

36

上海老股票论坛 bbs.mfaogu.com

上升50%。

P_0为何值时我们应当现在就投资而不是等待呢？如果虚拟产品工厂的当前价值V_0超过其总成本1 600+F_0，我们应当现在投资。因此，我们用P_0^*表示临界价格，满足$V_0=1\ 600+F_0$，即$11P_0^*=1\ 600+7.5P_0^*-727$，或者$P_0^*=249$美元。如果$P_0$超过了249美元，现在投资要比等待会更好。期权的实值是充分大的，等待的成本（阶段0利润的不足）超过了收益。[6]

找到投资期权的价值我们就得到了一个临界价格。通过计算现在就投资时项目的净现值（作为P_0的函数），并令它等于一直等到下一年才投资时的净现值，然后以价格结果为基础决定是否投资，这样也能找到这个临界价格（这一点作为习题留给读者）。

这样，投资期权的价值就是当前价格P_0的分段线性函数，最优投资规则似乎取决于P_0。如果$P_0\leqslant 97$美元，$F_0=0$，则人们将永远不对新工厂投资；如果97美元$<P_0\leqslant 249$美元，则$F_0=7.5P_0-727$，人们将等一年，价格若上升就投资；如果$P_0>249$美元，则$F_0=11P_0-1\ 600$，人们将立即投资。这一结论列在表2—1中。

表2—1　投资期权的价值与投资规则

区域	期权价值	最优投资规则
$P_0\leqslant 97$	$F_0=0$	永远不投资
$97<P_0\leqslant 249$	$F_0=7.5P_0-727$	只有当价格上升时才在阶段1投资
$P_0>249$	$F_0=11P_0-1\ 600$	在阶段0投资

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

在图2—4中，我们已经画出了作为P_0的函数的F_0。假定我们惟一的选择是要么现在投资要么永远不投资，那么投资期权将是0与$11P_0-1\ 600$中的最大值，即现在虚拟产品工厂的价值V_0小于建设这一工厂的成本1 600美元。（在金融术语中，这就是期权的内在价值，即在0与立即执行该期权的价值中取最大值）。另外，只要$11P_0>1\ 600$美元，即$P_0>146$美元，我们现在就投资。当$P_0>249$美元，投资期权等于其内在价值$11P_0-1\ 600$，因为这种情形下，现在投资而不是等待是最优的。因此，当$P_0>249$美元时，$11P_0-1\ 600$被显示为一条实线。然而，当$P_0<249$美元时，投资期权的价值大于$11P_0-1\ 600$，因此，至少在下一年之前，左边是不执 37

行的。

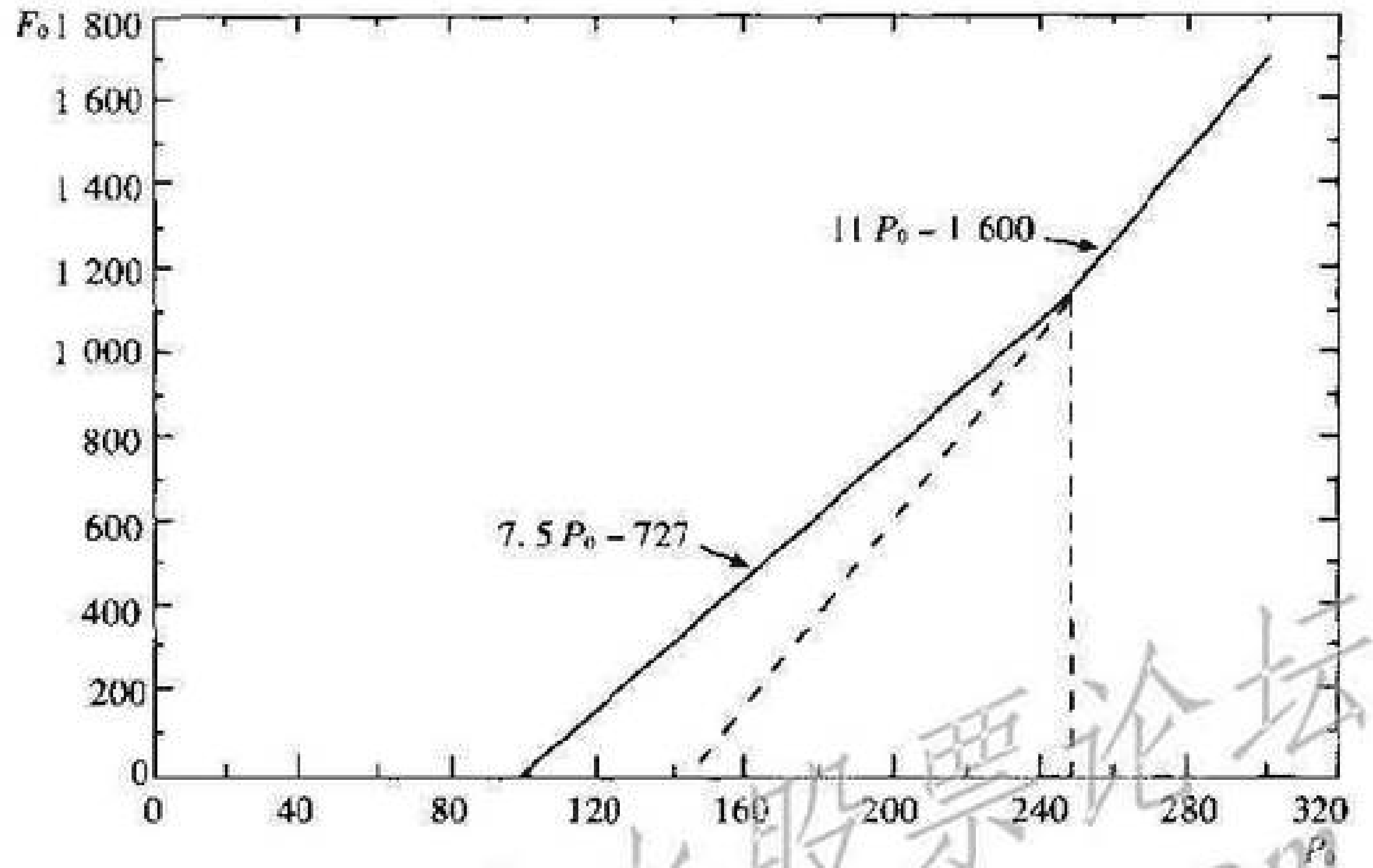


图 2—4 作为初始价格函数的投资期权价值

38 注意到在图 2—4 中 F_0 是 P_0 的凸函数，而且 F_0 大于或等于现在执行期权的净回报 $V_0 - I$，超过了最优执行点（在本例中为 249 美元）。我们在后面将发现，投资期权的价值典型地拥有这些特征。

3. 改变价格的概率

我们也可以决定投资期权的价值如何取决于 q，即虚拟产品价格下一年将上升的概率（迄今为止，我们一直假定这一概率为 0.5）。为此，我们令初始价格 P_0 是一任意值，但同时把投资成本 I 固定为 1 600 美元。那么，我们可以遵循与以前相同的步骤来寻找期权的价值和最优投资规则。

读者可以验证，虚拟产品的空头要构建的无风险投资组合为 $n = 8.5$，而且独立于 q。（其原因是 n 取决于阶段 1 中投资组合的可能的价值 Φ_1，尽管投资组合并不一定会以这种概率取这些值。）然而，这种空头所要求的支付确实取决于 q，因为从持有虚拟产品中获得的预期资本收益取决于 q。为计算这一点，令 $E_0(P_1)$ 表示下一年虚拟产品的预期价格，它是以阶段 0 的价格为条件计算的。[7] 这样，$E_0(P_1) = (q + 0.5)P_0$。那么，虚拟产品的预期

资本收益率为 $\frac{E_0(P_1)-P_0}{P_0}=q-0.5$，空头中每一产品所要求的回报为 $[0.1-(q-0.5)]P_0=(0.6-q)P_0$。令 $\Phi_1-\Phi_0-(0.6-q)nP_0=0.1\Phi_0$，且令 $n=8.5$，我们发现，如果 $P_0>97$ 美元，期权的价值为

$$F_0=15qP_0-1\,455q \tag{2-10}$$

注意，F_0 随着 q 的增加而增加（只要 $P_0>97$ 美元）。这正是我们所期望的，因为一个较高的 q 意味着价格的上升和投资期权的执行。如果 $P_0\leqslant97$ 美元，无论价格是否上升，我们永远都不会投资且 $F_0=0$。

投资决策如何取决于 q？考虑到只要 $F_0>V_0-I$，最好是等待而不是现在就投资。在这种情形下，$V_0=P_0+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{(q+0.5)P_0}{(1.1)^t}=(6+10q)P_0$。因此， 39

只要 $15qP_0-1\,455q>(6+10q)P_0-1\,600$，即 $P_0<P_0^*=\frac{1\,600-1\,455q}{6-5q}$，则最好是等待。此外，$P_0^*$ 随着 q 的上升而下降，即价格提高的概率较高促使企业更快地投资。为什么会这样？等待的成本是本阶段不出售虚拟产品而流失的收益，它随 P_0 的提高而提高。由于较高的 q 使下一阶段出现坏结果的可能性较小，它减少了等待的价值。因此，一个较高的 q 意味着一个较小的 P_0 足以使等待成本超过等待的价值。

4. 价格上升的不确定性

改变概率 q 而保持所有其他变量不变时，我们就改变了阶段 1 的预期价格。假定阶段 1 的预期价格保持在初始价格水平 P_0 不变，但我们提高价格上下改变的幅度，这样，阶段 1 价格的方差提高了。P_1 分布中的这种均值回归的变化（mean-reverting spread）对投资期权的价值 F_0、临界价格 P_0^*（超过它立即投资而不是等待是最优的）会有怎样的影响呢？

像以前那样，假定 $q=0.5$。但是现在价格在阶段 1 或者上升或者下降 75%，而不是以前的 50%。这样 P_1 的方差更大，但是其期望值仍为 P_0。为找到 F_0，我们像以前那样进行同样的步骤，创建一个无风险的投资组合，使其回报等于无风险回报。再令投资组合是投资期权的多头和 n 单位虚拟产品的空头，因而其现在的价值为 $\Phi_0=F_0-nP_0$。在阶段 1，价格上升到 $1.75P_0$，在这种情形下，项目的价值为 $V_1=11P_1=19.25P_0$，因此，$\Phi_1=19.25P_0-1\,600-1.75nP_0$；或者价格下降到 $0.25P_0$，在这种情形下，$\Phi_1=-0.25nP_0$。令这两种可能的 Φ_1 相等并求 n 的值：

$$n = 12.83 - \frac{1\,067}{P_0} \qquad (2-11)$$

则 $\Phi_1 = -3.21P_0 + 267$，与 P_1 无关。考虑到空头要求的回报为 $0.1nP_0 = 1.28P_0 - 107$，投资组合的回报为 $8.34P_0 - F_0 - 693$。令它等于 $0.1\Phi_0 = 0.1F_0 - 1.28P_0 + 107$，并求 F_0，我们有

$$F_0 = 8.75P_0 - 727 \qquad (2-12)$$

如果 $P_0 = 200$ 美元，则 $F_0 = 1\,023$ 美元，这远远大于前面当价格仅上升或下降 50%时所得到的 773 美元的价值。为什么不确定性的提高增加了投资期
40 权的价值？因为它提高了来自期权的向上的潜在回报，而保持向下的回报为零（如果价格下降，我们将不执行期权）。

我们还可以计算临界的初始价格 P_0^*，它足以保证现在投资而不是等待。令虚拟产品工厂的当前价值 $V_0 = 11P_0$ 等于其总成本 $1\,600 + F_0$。利用关于 F_0 的公式（2-12），可以得出 $P_0^* = 388$ 美元，这远远大于我们前面所得到的 249 美元的价值。由于期权的价值较大，现在就投资而不是等待的机会成本比较高，因此，存在更高的等待激励。

5. "坏消息原则"

考虑价格向上移动的概率 q 变化和向上、向下移动的幅度变化，我们可以决定"好消息"（向上移动）和"坏消息"（向下移动）如何独立地影响确保立即投资的临界价格 P_0^*（在前面的计算中，向上或向下的移动必须同时上升或下降）。我们将发现 P_0^* 仅取决于价格向下移动的幅度，而不是向上移动的幅度。理由是，正是为避免"坏消息"的结果才导致我们等待。[8]

假定初始价格为 P_0，但在阶段 1，价格变为

$$P_1 = \begin{cases} (1+u)P_0，概率为\ q， & u\ 表示价格上升的幅度 \\ (1-d)P_0，概率为\ 1-q， & d\ 表示价格下降的幅度 \end{cases}$$

为保证一般性，令投资成本为 I。在这种情形下，如果我们现在就投资，净现值为

$$\begin{aligned} NPV &= -I + P_0 + q\sum_{t=1}^{\infty}\frac{(1+u)P_0}{(1.1)^t} + (1-q)\sum_{t=1}^{\infty}\frac{(1-d)P_0}{(1.1)^t} \\ &= -I + 10[1.1 + q(u+d) - d]P_0 \qquad (2-13) \end{aligned}$$

如果我们等待，则净现值为

上善若水股票论坛 bbs.maogu.com

$$NPV = \frac{1}{1.1}\{q\max[0, -I + 11(1+u)P_0] + (1-q)\max[0, -I + 11(1-d)P_0]\} \quad (2-14)$$

很容易证明（而且直观上非常清楚），现在投资与等待之间的无差异点出现 41
在 P_0 的下述范围内：价格上升时，阶段1的投资可以保证；价格下降时，就不能保证在阶段1的投资。

在这种情形下，式（2－14）中的净现值可以简化为

$$NPV = \frac{q}{1.1}[-I + 11(1+u)P_0] \quad (2-15)$$

令现在就投资的净现值方程式（2－13）等于等待的净现值方程式（2－15），并求 P_0 的解，则

$$P_0^* = I\left(\frac{0.1}{1.1}\right)\left[\frac{0.1+(1-q)}{0.1+(1-q)(1-d)}\right] \quad (2-16)$$

式（2－16）中有一点值得注意——P_0^* 确实在任何途径上都不依赖于 u，即价格向上移动的幅度。它仅仅取决于价格向下移动的幅度 d，及其向下移动的概率 $1-q$。而且，d 越大，临界价格 P_0^* 也越高，正是可能的"坏消息"的数量级导致了等待的激励。[9]

我们还可以采用比我们以前所做的更一般的方式来考察 P_1 均值回归范围的影响。令 $q=\frac{d}{u+d}$，则 $E(P_1)=P_0$，$\mathrm{Var}(P_1)=udP_0^2$。因此，如果我们同比例地提高 u 和 d，就可以保持 q 和 $E(P_1)$ 不变，而提高 P_1 的方差。从式（2－16）中我们可以观察到，如果 d 较大，而 q 保持不变，P_0^* 提高。我们又一次发现，均值回归的范围提高了等待激励。

2.2 将模型扩展到三阶段

在上面的例子中，我们作出了不现实的假定，即在第一年之后不存在虚拟产品价格的不确定性。在大多数市场中，期货价格经常是不确定的，而且不确定性的数量级随时间期限提高。换句话说，尽管虚拟产品的预期期货价格可能一直等于当前价格，但我们所考察的期货时间越长，期货价格的方差一般也将越大。在本书后面的章节，我们将以这种方式来模型化价格的随机演变。在这里，通过推广我们的例子，使作出投资决策时有三个阶段，我们 42
就可以获得对投资问题特征的更多认识。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

像以前那样，假定 $t=0$ 时，虚拟产品的初始价格为 P_0；$t=1$ 时，价格将上升或下降 50%（$P_1=1.5P_0$ 或 $P_1=0.5P_0$），每种情况发生的概率为 50%；那么，在 $t=2$ 时，价格也将以相同的概率上升或下降 50%。因此，P_2 有三种可能值：$2.25P_0$、$0.75P_0$ 和 $0.25P_0$。对所有的 $t\geqslant 2$，价格保持在这一水平上（见图 2—5）。我们再次将投资的直接成本 I 固定为 1 600 美元。

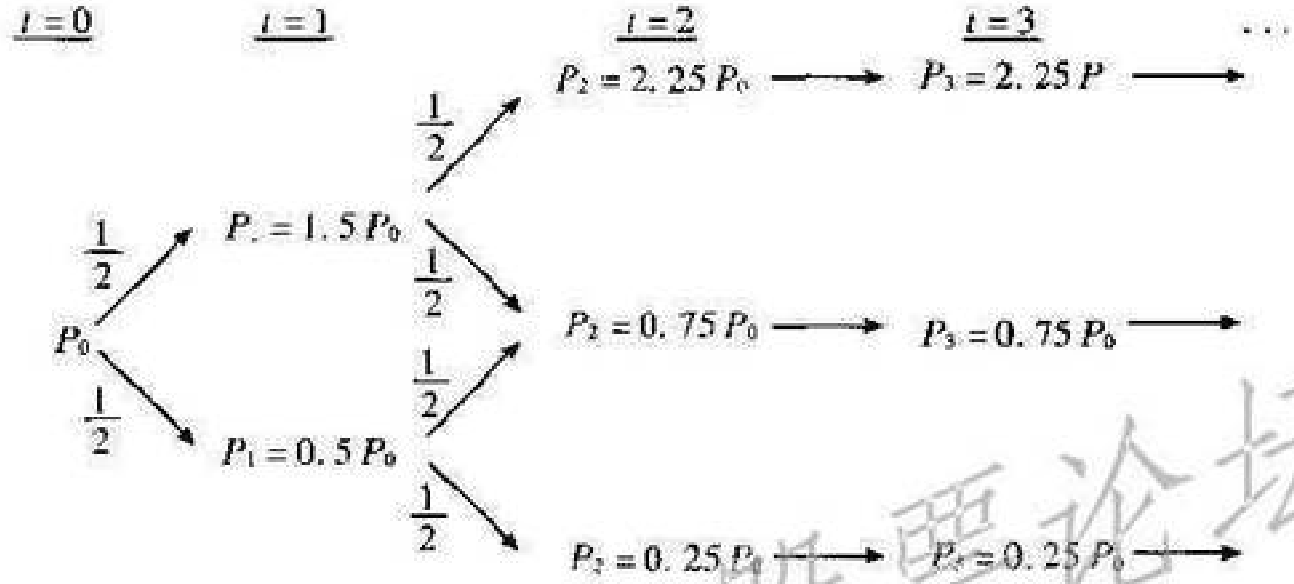


图 2—5 虚拟产品的价格

通过增加一阶段的价格不确定性，我们的投资问题变得更复杂了。第一个复杂的因素是，现在有五种有意义且必须考虑的可能的投资策略。特别地，它可能是最优的：（1）立即投资。（2）等一年，如果价格上升就投资，如果价格下降永远不投资。（3）等一年，如果价格上升就投资；如果价格下降，则再等一年，若价格上升就投资。（4）等两年，只有价格在前两段时间都上升时才投资。（5）永不投资。哪种规则是最优的取决于初始价格和投资成本，而且必须算出每种可能规则下的投资期权价值。第二个复杂的因素是，尽管我们仍然可以通过构造一无风险的投资组合来计算投资期权的价值，但是这一组合的成分在两年间并不是不变的；在 $t=1$ 价格变化后，我
43 们不得不改变处于空头的虚拟产品的数量。[10]

我们将再次利用期权定价方法处理这一问题。我们想获得在 $t=0$ 时作为初始价格 P_0 的函数的投资期权价值 F_0，以及最优的投资规则，诀窍是向后工作。从 $t=1$ 向前看，我们将解决两个独立的投资问题，首先是 $P_1=0.5P_0$，然后是 $P_1=1.5P_0$。假定在两种情形下我们还没有投资，在每种情形下，通过构造一无风险的投资组合并计算其回报，我们将确定 $t=1$ 时投资期权的价值 F_1。给出 F_1 的两种可能值（$P_1=0.5P_0$ 或 $P_1=1.5P_0$），然后可以回到 $t=0$，再构造无风险的投资组合并计算其回报从而确定 F_0。

假定在 $t=1$，$P_1=0.5P_0$，而且 P_0 的值处于这样一种临界状态：如果价格升高，我们在阶段2就投资；如果价格下降，则不投资。现在构造一个无风险的投资组合，包括投资期权和数量为 n_1 的虚拟产品的空头。这一投资组合的价值为 $\Phi_1=F_1-n_1P_1$。如果价格在阶段2上升（达到 $0.75P_0$），我们将投资，因此，$F_2=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{0.75P_0}{(1.1)^t}-1\,600=8.25P_0-1\,600$，$\Phi_2=8.25P_0-1\,600-0.75n_1P_0$。如果价格在阶段2下降（$0.25P_0$），我们将不投资，$F_2=0$，而 $\Phi_2=-0.25n_1P_0$。令这两种情形下 Φ_2 相等，我们发现，如果 $n_1=16.5-\frac{3\,200}{P_0}$，则投资组合是无风险的；不论价格上升还是下降，$\Phi_2=800-4.125P_0$。计算投资组合的回报（$\Phi_2-\Phi_1-0.1n_1P_1$），并令它等于无风险回报（$0.1\Phi_1$），给我们提供了投资期权的价值：$F_1=3.75P_0-727.3$。而且，从这里注意到，当 $P_0=193.34$ 时，$F_1=0$。因此，如果价格在阶段1下降，且 $P_0<193.94$，我们将永不投资。

现在我们必须重复这一过程，假定价格在阶段1已经上升，即 $P_1=1.5P_0$。读者可以验证，在这种情形下，无风险的投资组合要求空头为 $n_1=16.5-\frac{1\,067}{P_0}$ 的虚拟产品，投资期权的价值为 $F_1=11.25P_0-727.3$。在这种情形下，当 $P_0=64.65$ 时，$F_1=0$。因此，如果 $P_0<64.65$，我们将永不投资，即使价格在两阶段都上升。此外，假定我们在阶段1投资而不是等待直到阶段2投资，这样我们将得到一个净值 $V_1-I=11\ (1.5P_0)-1\,600$。令这一数值等于 F_1 并求 P_0，可得 $P_0=166.23$。因此，如果 $P_0>166.23$，且价格已经上升，我们将在阶段1投资，而不是再等一年。 44

我们现在知道了 F_1 以及对 P_1 的两种可能结果下的最优投资策略（假定我们还没有投资），因此，我们可以通过再一次构造无风险的投资组合并计算其回报来确定 F_0。

由于最优投资策略取决于 P_0，这必须对不同范围的 P_0 都进行计算，即对 $64.65<P_0\leqslant166.23$（在这种情形下，只有当价格在两阶段都上升时，我们才会在阶段2投资），对于 $166.23<P_0\leqslant193.94$（在这种情形下，如果价格上升，我们将在阶段1投资，但如果价格下降，我们将永不投资），以及对 $P_0>193.34$（在这种情形下，如果价格上升，我们将在阶段1投资；但如果价格下降，我们将等一年，如果价格在阶段2上升，我们就投资）。所有的解被列在表2—2中。

表 2—2　**投资期权价值与投资规则**

范围	期权价值	最优投资规则
$P_0 \leqslant 64.65$	$F_0=0$	永不投资
$64.65 < P_0 \leqslant 166.23$	$F_0=5.11P_0-330.6$	只有当价格在阶段 1 和阶段 2 都上升时，才在阶段 2 投资
$166.23 < P_0 \leqslant 193.94$	$F_0=7.5P_0-727.3$	如果价格上升，在阶段 1 投资；如果价格在阶段 1 下降，则永不投资
$193.94 < P_0 \leqslant 301.19$	$F_0=9.2P_0-1\,057.9$	如果价格上升，则在阶段 1 投资；如果价格在阶段 1 下降，则等待；如果价格上升，则在阶段 2 投资
$P_0 > 301.19$	$F_0=11P_0-1\,600$	在阶段 0 投资

图 2—6 显示了 F_0 作为 P_0 函数的图像。与两阶段模型一样，这是一个分段线性函数，但现在有更多的分段，每一分段对应着一种最优投资策略。另外，假定惟一的选择是要么现在投资，要么永不投资，则投资期权的价值将为 $11P_0-1\,600$。只要 $11P_0>1\,600$，即 $P_0>146$，我们现在就投资。当 $P_0>301.19$，期权价值也是这么多，因为那时 $F_0=9.2P_0-1\,057.9-11P_0-$
45 1 600，最优是现在就投资而不是等待。因此，$11P_0-1\,600$ 对 $P_0>301.19$ 被显示为实线，但是对 $146<P_0<301.19$ 则被显示为虚线。最后，注意到 F_0 是 P_0 的凸函数，因此，F_0 大于或等于现在就执行期权的净回报 V_0-I，直到最优执行点（这里为 301.19 美元）。

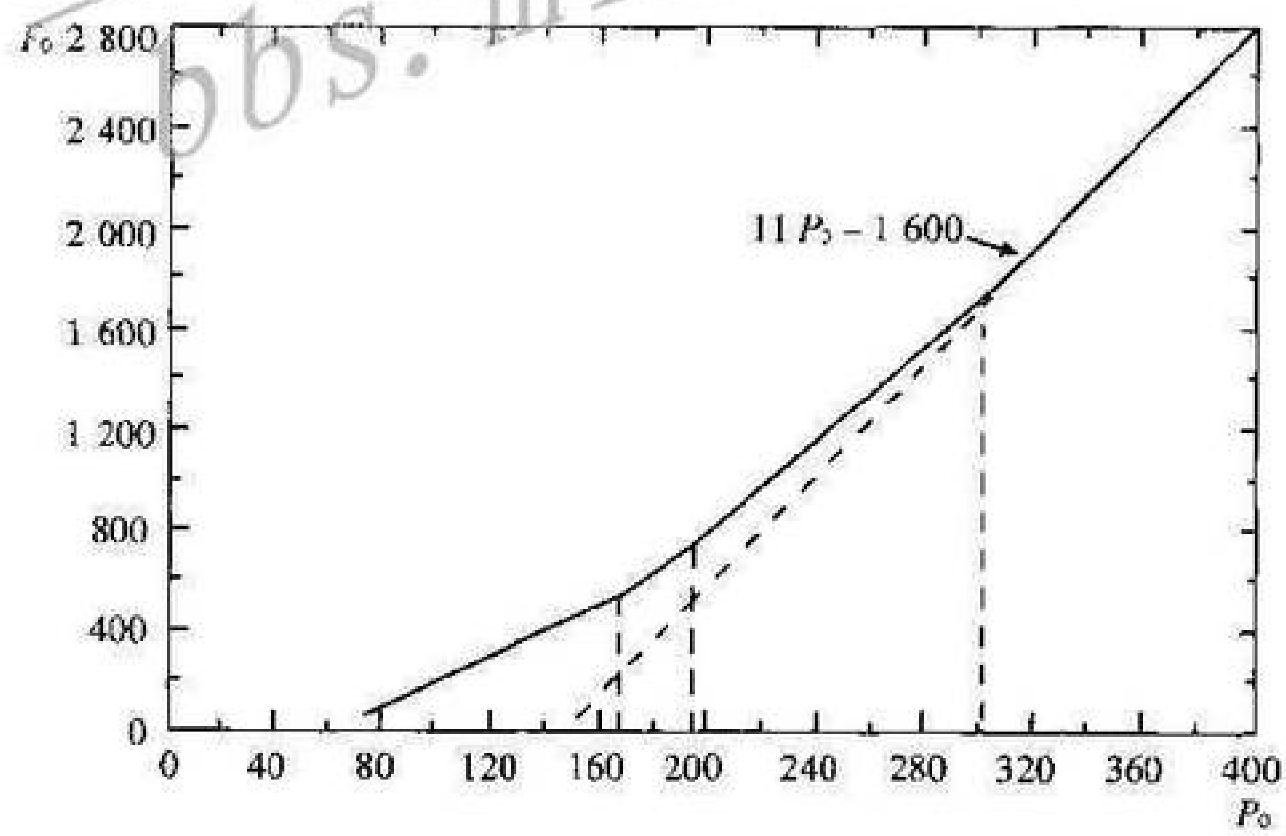


图 2—6　作为初始价格函数的投资期权的价值

与以前一样，我们可以检验 F_0 及最优执行点 P_0^* 取决于投资成本 I 或者对价格变化的方差。（然而，现在进行这些计算更加辛苦，因为现在涉及三个阶段而不是两个阶段。）例如，我们可以证明，如果价格变化的方差上升，而预期的价格变化保持不变，则期权价值 F_0 将上升，临界执行价格 P_0^* 也将上升。作为练习，通过令 P 在每一阶段上升或下降 75%，而不是如图 2—5 所示的 50%，读者也许能检验这一点。

如果这样做了，现在可以将我们的例子扩展到四阶段，允许价格在 $t=3$ 时再次上升或下降 50%。我们可以向后做，找到与 P_2 的每一可能值对应的 F_2，然后找到 P_1 的每一可能值所对应的 F_1，最后找到 F_0。以相似的方法，我们可以将例子扩展到五阶段、六阶段等。正如我们所做的，我们将发现 F_0 的曲线将越来越弯。在第 5 章中，我们将发现，随着阶段数量的变大，F_0 的曲线将逼近一条始于原点并上升到与表示立即投资获得的净回报（V_0-I）曲线相交的光滑曲线。事实上，这两条曲线相切，它们的交点限定了立即投资是最优策略时的临界价格 P_0^*。 46

然而，增加越来越多的阶段将使我们的例子变得不可思议的复杂，而且在任何情形下都会变得不太满意，因为最终我们希望价格在未来每一时刻 t 都会上升或下降。为解决此类投资问题，我们需要更好的方法。

在本书第 5 章中我们将通过考虑来自投资的回报在时间上的连续波动来推广这些例子。正如我们将要看到的，这种连续时间方法非常有用，而且最终会非常简单。然而，它需要对随机过程有一定理解，如伊藤引理（Ito lemma）（它实际上是关于随机过程的微分函数和积分函数的规则）。这些工具目前在经济学和金融学中的应用越来越广泛，它们提供了分析更宽范围内的投资时机和期权评价问题的便利途径。下面两章，我们为不熟悉它们的读者提供了这些工具的一个简介。

2.3 成本的不确定性

我们现在回到简单的两阶段例子中，并检验一些其他的不确定性来源。在本部分，我们将考虑投资成本的不确定性。成本的不确定性对需要花费很长时间来建设的大型项目来讲可能特别重要。例如核电厂（由于工程和管制方面的不确定性，其中的建筑总成本难以预测）、大型石化集团、新航线的

开发，以及大型的新都市建设计划等。另外，大规模并非是必不可少的。大多数的研究与开发项目涉及大量的成本不确定性，制药公司的新药开发便是一个例子。

在我们的两阶段例子的背景下，假定虚拟产品的价格现在为 200 美元，而且将永远保持为 200 美元。然而，建立虚拟产品工厂的直接成本 I 是不确定的。

我们将考虑与 I 有关的不确定性的两种不同来源。首先，由于虚拟产品工厂需要钢铁、铜以及劳动力来建造，这些建筑投入品的成本随时间随机
47 波动，从而导致了我们称之为投入品成本的不确定性；其次，随时间推移不能预见到的政府管制的改变可能会改变一种或多种建筑投入品的需求量。(例如，新的安全管制可能会提高劳动力需求，或者改变的环境管制可能需要更多的资本。）这样，尽管 I 现在是已知的，但其在下一年的价值是不确定的。

正如人们所期望的，这类不确定性与投资回报的未来价值 V（它产生了现在就投资而不是等待新信息的机会成本）的不确定性对投资决策有相同的影响。结果，尽管在传统测度方法下项目的净现值可能为正，但开始投资可能仍然是不经济的。

作为例子，假定 I 现在为 1 600 美元，但在下一年它将上升到 2 400 美元或下降为 800 美元，每种情况发生的概率为 0.5。跟以前一样，利率为 10%。我们是应当现在投资，还是等到下一年？如果我们现在就投资，净现值由式（2-1）给出，即 $-1\,600+2\,200=600$（美元）。这一净现值为正，但它再次忽略了机会成本。为说明这一点，让我们重新计算净现值，但这次假定我们一直等到下一年，在这种情形下，只有当 I 下降到 800 美元时，它才是事后的最优投资。在这种情形下，净现值由式（2-17）给出：

$$NPV=(0.5)\left[-\frac{800}{1.1}+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{200}{(1.1)^t}\right]=\frac{700}{1.1}=636(\text{美元}) \quad (2-17)$$

（在第 0 年没有开支和收益。在第 1 年，只有当 I 下降为 800 美元及其发生的概率为 0.5 时，我们才投资。）如果我们在决定是否投资之前等一年，项目现在的净现值为 636 美元，因此，等待明显要好于现在就投资。

在这一点上，似乎不确定性总是导致人们推迟投资，或者至少提高了投资所必须达到的最低预期资本回收率，但这并非事实。如果投资提供了信息，不确定性可以降低一个项目的最低预期资本回收率。考虑完成一个项目

中物质困难的不确定性，我们称之为技术不确定性：假定已知要素成本，最终需要多长时间、多少努力及多少材料来完成项目？此类不确定性只能通过实际操作和完成该项目才能得到解决。[11]随着项目的进行，人们可以发现 48
实际成本（和建筑时间）逐步分摊，这些成本可能经常比预期的高或低（随着困难的出现或者工程的实际进程快于计划进程），但是，投资总成本只有在项目完成时才能被确切地知道。

由于此类不确定性，项目可能会有一预期成本使净现值为负，但是如果成本的方差足够高，开始投资仍然可能是经济的。理由是投资揭示了关于成本的信息，从而更进一步揭示了来自投资的净回报。因此，项目包括超过了完成项目的直接贡献的一个额外值，这一额外值（被称为影子价格，因为它并不是由现金流直接测度的）降低了投资的所有预期成本。

下面的简单例子将有助于说明这一点。假定虚拟产品的当前价格和未来价格都为 200 美元，而建设一家虚拟产品工厂的成本是不确定的。为建设工厂，人们最初必须花费 1 000 美元。工厂最终被建成的概率为 0.5，但是需要额外的 3 000 美元以完成工厂建设的概率也为 0.5。由于工厂的预期成本为 $1\ 000+(0.5)(3\ 000)=2\ 500$ 美元，其价值为 2 200 美元，投资的净现值看起来为负，因此建议我们不投资，但这样忽视了在完成项目阶段 1 中所获得的信息的价值以及在阶段 2 必须花费 3 000 美元时我们可以放弃项目的事实。正确的净现值为：$-1\ 000+(0.5)(2\ 200)=100$ 美元。净现值是正的，因此人们应当在阶段 1 投资。

因此，我们看到，项目成本的不确定会导致人们推迟投资或加快投资。如果不确定的解决方案独立于企业的所作所为，它与投资回报的不确定性有几乎相同的影响，并且会产生等待的激励。但是如果不确定性能通过投资得到部分解决，它会有相反的影响。我们在本书的后面章节中还将回到成本的不确定性并更详细地考察其意义。

2.4 利率的不确定性

下面假定投资成本和投资回报都被确切地掌握，但是用于贴现未来现金流的利率以不可预测的方式发生改变。利率的不确定性将如何影响投资决策呢？

49 利率的不确定性对投资决策有两种影响。第一种影响是，利率的不可预测波动可以提高投资未来回报的期望值。例如，假定投资永远产生 1 美元的支付性年金。这一年金的现值为1(美元)/r，这里 r 为利率。如果 $r=10\%$，现值为1(美元)/0.10=10(美元)。但若假定 r 不确定，可能为 5%或 15%，每种情况的概率为 0.5，因而 $E(r)=10\%$，则年金的期望值为 $0.5\left(\frac{1}{0.05}\right)+0.5\left(\frac{1}{0.15}\right)=13.3$(美元)>10(美元)。这使得投资更有吸引力，并提高了对投资的激励。[12]

尽管如此，未来利率的不确定性仍然会导致投资的推迟，原因是利率的不确定性的第二种影响起了相反方向的作用——它创造了（为了发现利率是升还是降）等待的价值。这种影响与投资回报的不确定性的影响方式几乎相同。

为弄清这一点，让我们再回到两阶段模型的例子。这一回我们假定虚拟产品的价格固定为 200 美元，而虚拟产品工厂的建造成本固定为 2 000 美元，惟一的不确定性是利率。现在的利率为 10%，但下一年它就会发生变化。它提高到 15%的概率为 0.5，它下降到 5%的概率也为 0.5。然后它将保持在这一新水平上。

在下一年虚拟产品工厂的价值是多少呢？如果没有利率的不确定性，即如果我们知道利率将保持在 10%，则下一年工厂的价值为

$$V_1=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{200}{(1.1)^t}=2\ 200(\text{美元})$$

在我们的例子中，下一年及以后的利率期望值为 10%，但是确切的价值不清楚。因此，下一年工厂的价值为

$$V_1=\begin{cases}\displaystyle\sum_{t=1}^{\infty}\frac{200}{(1.15)^t}=1\ 533(\text{美元})\text{，概率为 }0.5\\ \displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\frac{200}{(1.05)^t}=4\ 200(\text{美元})\text{，概率为 }0.5\end{cases}$$

50 因此，V_1 的期望值为(0.5)(1 533)+(0.5)(4 200)=2 867 美元，它大于未来利率确定时的价值。

接着，我们发现（保持利率的期望值为一常数）未来利率的不确定性提高了项目的期望值。但是利率的不确定性如何影响投资决策呢？首先，注意到如果没有利率的不确定性，明显地我们现在就投资。如果我们现在就投

资，项目的净现值为

$$NPV = -2\,000 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1.1)^t} = 200(\text{美元}) \qquad (2-18)$$

但是如果我们等到下一年再投资，现在的净现值仅为$\frac{2\,200}{1.1} - 2\,000 = 0$ 美元。

如果利率不确定，情形会不同。如果我们现在投资，净现值为

$$\begin{aligned} NPV &= -2\,000 + 200 + \frac{E(V_1)}{1.1} = -1\,800 + \frac{2\,867}{1.1} \\ &= 806(\text{美元}) \end{aligned} \qquad (2-19)$$

（如果我们现在就投资，我们能以 200 美元制造并出售一个虚拟产品，而且我们将拥有一家下一年的期望值为 2 867 美元的工厂。）这一净现值为正。但是，假定我们在决定是否投资之前一直等到下一年，如果利率上升到 15%，工厂的价值将只有 1 533 美元，它少于投资成本 2 000 美元。因此，如果利率下降到 5%，我们才投资。因为发生这样的事情的概率为 0.5，假定我们等待的净现值为

$$\begin{aligned} NPV &= (0.5)\left[\frac{-2\,000}{1.1} + \frac{1}{1.1}\sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1.05)^t}\right] \\ &= 1\,000(\text{美元}) \end{aligned} \qquad (2-20)$$

这一净现值较高。因此，最好是等待而不是现在就投资。

这是对利率不确定性的一种简单分析，但是它有一些重要的含义。第一，均值回归的利率波动将提高项目的期望值，但是也会产生等待而不是现在就投资的激励。理由是，正如未来现金流的不确定性，未来利率的不确定性产生了等待新信息的价值。第二，如果公共政策的目标是激励投资，利率的稳定性可能比利率水平更重要。导致利率降低但使它更灵活的政策最终会导致总投资支出的下降。[13]正如我们将要在第 9 章中所要说明的，稳定性和 51
可预测性的重要性也可以应用于其他政府政策工具，如税率和贸易政策等。

2.5　规模经济与灵活性

正如经济系或商学院的学生以前所学过的，规模经济是节约成本的一条重要途径。通过建造一家大车间而不是两三家小车间，企业能够降低其平均成本，提高其盈利能力。这表明，企业应当通过集中投资从而对它们产品需

上善若水股票论坛 bbs.mlaogu.com

求的增长作出反应，即不经常地投资于新增生产能力，而是每次都增加大型的和有效的车间。

然而，如果存在需求增长的不确定性（这是经常的），企业应当怎样做？如果企业不可逆地投资于额外的巨大生产能力，而需求增长却是缓慢的，甚至是下降的，企业会发现这占用了本身不需要的资本。因此，当需求增长不确定时，在规模经济与灵活性之间存在一种权衡，这种灵活性是根据需要更经常地投资于小额增长的生产能力而获得的。

下面是电力产业面临的一个重要问题。建造大型燃煤电厂的每单位生产能力的成本比以小额数量增加生产能力的单位成本要便宜得多。但同时，电厂在人们对其电力需求的未来增长率上面临相当大的不确定性。[14] 以小额数量增加的生产能力赋予电厂某种灵活性，但是代价却很大。因此，能够对这种灵活性定价是重要的。本书所使用的期权方法刚好适合于这样做。这里我们将利用简单例子说明这些基本观点，其中需求增长是确定的，但相对的燃料价格是不确定的。[15]

考虑每年需求增长都为 100 兆瓦特（MW）的一家电厂。那么电厂必须提高其生产能力，问题是如何提高。这里有两种选择。电厂以 1.9 亿美元建造一 200MW 的的燃煤电厂（可以满足两年的需求增加）（车间 A），或者以
52 1 亿美元建造一 100MW 的燃油车间（车间 B）。在当前煤炭和石油价格上，并不仅仅在其资本成本（每 100MW 生产能力需 0.9 亿美元）方面，而且在营运成本方面，燃煤电厂都更经济；经营车间 A 时每 100MW 的电力成本为 1 900 万美元，而车间 B 的成本每年为 2 000 万美元。我们假定，电厂的贴现率为每年 10%，而且每一车间永远存在。在这种情形下，如果燃料价格保持不变，明显地车间 A 是更被人偏爱的选择。

然而，燃料价格不可能保持不变。由于真正起作用的是与煤炭价格相比较的燃油的相对价格（而且由于煤炭价格实际上比燃油价格更稳定），我们假定煤炭价格保持固定，而燃油价格在下一年或者上升或者下降，其概率相等，然后保持不变。如果燃油的价格上升，车间 B 的营运成本将上升到每年 3 000 万美元，但如果价格下降，营运成本将下降到每年 1 000 万美元（见图 2—7）。

现在车间的选择更复杂了。尽管由于其规模，车间 A 的资本成本较低，而且在当前的燃油价格水平上，其营运成本也比较低，但是车间 B 提供给工厂更多的灵活性，因为它仅仅需要对一年的需求增长承担责任——若燃油
53 价格下跌，工厂不会在第二年被额外的 100MW 的生产能力缠住。为了决定

哪种选择是最好的，我们的计算从本年度开始，每年永远生产 100MW 的电力以及从下一年开始每年额外生产 100MW 的电力的预期成本的现值。

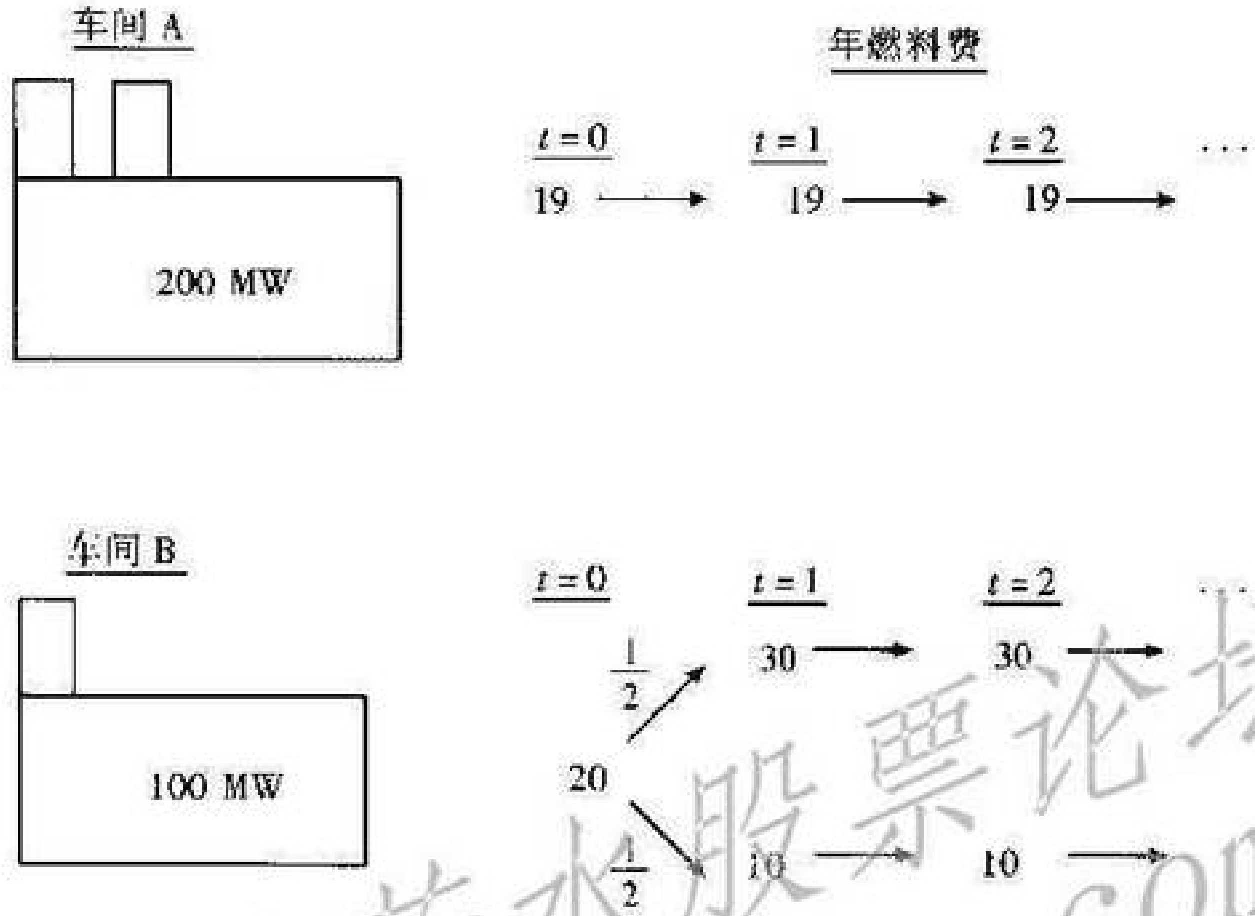


图 2—7　在电厂车间中的选择

首先，假定把 200MW 的电力全部交给燃煤或燃油车间。那么，如果我们选择煤炭，成本流的现值为

$$PV_A = 180 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{19}{(1.1)^t} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{19}{(1.1)^t} = 579(\text{百万美元}) \quad (2-21)$$

注意，180 是全部 200MW 电力的资本成本，而 19 是每 100MW 电力的年营运成本，其中第一项从现在开始计，而第二项从下一年计起。下一步，假定我们选择燃油。由于燃油的预期年营运成本为 2 000 万美元，现值为

$$PV_B = 100 + \frac{100}{1.1} + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{20}{(1.1)^t} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{20}{(1.1)^t}$$
$$= 611(\text{百万美元}) \quad (2-22)$$

这样，似乎车间 A 被偏爱。

但是这种计算忽略了由较小的燃油车间所提供的灵活性。假定我们现在就安装 100MW 的燃油车间，但是如果下一年燃油价格上升，我们将安装生产能力为 200MW 的燃煤车间，而不是另一个 100MW 的燃油车间。这将给我们提供总计为 300MW 的生产能力，因此，使成本比较更有意义，我们必

上善若水股票论坛 bbs.mlaogu.com

须净赚额外 100MW 的现值，这一在从现在开始后两年才使用的现值为

$$
\begin{aligned}
PV'_{\mathrm{B}} &= 100+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{20}{(1.1)^t}+\frac{1}{2}\left[\frac{100}{1.1}+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{10}{(1.1)^t}\right]\\
&\quad+\frac{1}{2}\left[\frac{180}{1.1}-\frac{90}{(1.1)^2}-\sum_{t=1}^{\infty}\frac{19}{(1.1)^t}\right]\\
&= 555(\text{百万美元}) \qquad (2-23)
\end{aligned}
$$

注意到，式（2-23）中的第三项就是第二家 100MW 的燃油车间（只有当燃油价格下降时才会建造）的资本成本和营运成本的现值，而第四项是 200MW 的燃煤车间的头 100MW 的资本成本及营运成本的现值。算出的现值为 555 亿美元，那么安装较小的燃油车间、并因而维持灵活性就是偏好的选择。

54 评估这种灵活性的一条途径就是求出车间 A 成为被偏好的选择时，其资本成本应当降低多少。令 I_{A} 为车间 A 的资本成本，则车间 A 的安装与营运成本的现值为

$$
I_{\mathrm{A}}+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{19}{(1.1)^t}+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{19}{(1.1)^t}=I_{\mathrm{A}}+399
$$

通过现在安装车间 B，然后在下一年或者安装车间 A 或者车间 B（取决于燃油价格是上升还是下降），从而提供 200MW 电力的成本的现值为

$$
\begin{aligned}
&100+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{20}{(1.1)^t}+\frac{1}{2}\left[\frac{100}{1.1}+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{10}{(1.1)^t}\right]\\
&\quad+\frac{1}{2}\left[\frac{I_{\mathrm{A}}}{1.1}-\frac{0.5I_{\mathrm{A}}}{(1.1)^2}+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{19}{(1.1)^t}\right]\\
&=320+\frac{1}{2}\ (90.9+100)\ +\frac{1}{2}\ (0.496I_{\mathrm{A}}+190)\\
&=510.5+0.248I_{\mathrm{A}}
\end{aligned}
$$

为发现使电厂对这两种选择无差异时的资本成本，令它们的现值相等，并解得 I_{A}：

$$
I_{\mathrm{A}}+399=510.5+0.248I_{\mathrm{A}}
$$

或者 $I_{\mathrm{A}}^{*}=1.483$ 亿美元。所以，为弥补放弃较小车间在经济上所损失的灵活性，规模经济必须非常大（一家 200MW 的燃煤车间的成本比两家 100MW 的燃油车间的成本低 75%）。

2.6 文献导引

净现值标准及其在投资决策中的应用是公司理财课程中的重要主题，这也正是我们在本书中所做研究的大多数的起点。对净现值的计算以及利用资本资产定价模型来确定风险调整的贴现率不熟悉的读者，可能想温习公司理财方面的一本标准教科书。布雷利和迈尔斯（Brealey and Myers，1992）的书是很好的选择。

尽管我们在本书中基本上都忽略了税收的意义，但它会影响净现值计算中贴现率的选择。塔格特（Taggart，1991）提供了用在标准的净现值 55
模型中计算贴现率（经过风险与税收调整的）各种方法的评论。鲁巴克（Ruback，1986）证明无风险的税后名义现金流应当用无风险的税后利率（如国库券利率乘以 1 减去公司税率）来贴现，而且迈尔斯和鲁巴克（Myers and Ruback，1992）推导出在净现值计算中对有风险的现金流进行贴现的一种简单和大致的规则。

我们强调投资决策与金融期权的定价和执行之间的联系贯穿本书。尽管确实不必要，但对期权和期权定价技术的一些了解将对阅读本书有帮助。布雷利和迈尔斯（Brealey and Myers，1992）的著作提供了一个简单的介绍；鲁宾斯坦（Rubinstein，1987）和瓦里安（Varian，1987）的著作也提供了一个说明性综述。更详细的处理参见考克斯和鲁宾斯坦（Cox and Rubinstein，1985）、霍尔（Hull，1989）及加罗和拉德（Jarrow and Rudd，1983）的论述。尽管有些过时，但史密斯（Smith，1976）的综述也很有用。最后，关于把投资作为期权的有启发的讨论，参见凯斯特（Kester，1984）、梅森和默顿（Mason and Merton，1985）、特里乔治斯和梅森（Trigeorgis and Mason，1987）的论述及科普兰、科勒和马林（Copeland，Koller and Murrin，1991）书中的第 12 章。

【本章注释】

[1] 在下面所有的计算中，我们都将对结果进行四舍五入。

[2] 在这个例子中，期货价格将等于预期未来价格，因为我们假定风险是完全可分散的。（如果虚拟产品的价格与市场组合正相关，期货价格将低于未来现货价格。）注意到，如果虚拟产品是可以储存的，而且总的存储量

为正，持有存货的边际便利收益将不得不为 10%。原因是由于期货价格等于当前现货价格，净持有成本（10% 的利息成本小于边际便利收益）必须为零。

[3] 大多数期货市场仅适用于 1 年或差不多 1 年的期限。如果存在虚拟产品的一个无限未来的期货市场，相同的套利是在未来每年卖空 1 单位虚拟产品，即卖空所有的产出流，结论是一样的。

[4] 在本例中，所有不确定性在下一年都解决了。因此，等待期权在下一年没有价值，而且在当时投资是根据传统的净现值标准作出的，等待仅与这一年有关。在后面的章节中，我们将考虑一些更一般的情形，其中不确定性从来没有被完全解决，而且等待期权总是有价值的。

[5] 如前所述，下一年投资组合的价值为 $\Phi_1 = F_1 - nP_1$。如果 $P_1 =$ 300 美元，$F_1 = 3\,300 - I$，则 $\Phi_1 = 3\,300 - I - 300n$。如果 $P_1 = 100$ 美元，且 I 并没有低到无论怎样我们都要投资的程度，$F_1 = 0$ 及 $\Phi_1 = -100n$。令每种价格情形下的 Φ_1 等于前面给出的关于 n 的方程。

[6] 也许有人认为，只有当我们在下一年的投资与价格升降无关时，立即投资才被证明是可行的。事实上，立即投资的临界值比较低。假定我们等待，$V_1 - 1\,600 = 11P_1 - 1\,600 > 0$ 时，我们将在下一年投资。因此，如果价格下降，即 $P_1 = 0.5P_0$，只有当 $5.5P_0 - 1\,600 > 0$ 时，或者 $P_0 > 291$ 美元，超过 $P_0^* = 249$ 美元时，我们才投资。带有直觉错误的问题是它忽略了现在投资我们在这一年才能获得的收益。实际上，对 P_0，假定为 260 美元，最好现在就投资，即使我们确实在等待，如果价格确实下降了，我们在下一年将不投资。

[7] 我们利用 E 表示随机变量的预期（均值），则带有脚标的 E 将隐含着预期是以当时的信息变量为条件的。类似地，我们将利用 Var 表示方差。这些符号在全书中用法一致。其他符号对每章或每节都是特定的。本书最后的符号表收集了有意义的符号并说明了它们所表示的内容。

[8] 这一“坏消息原则”首先是由伯奈克（Bernanke，1983）清楚地说明的，同样的观点在丘吉尔曼（Cukierman，1980）的书中也可见到。

[9] 如果当前的利润可以为负，而且企业正准备决定一项代价高的不投资或废弃的项目，坏消息原则会变成好消息原则：好转的幅度和概率是激励等待背后的驱动力。回忆我们在第 1 章中对自杀的讨论，我们将强调这一点。如果潜在的坏结果变得更坏，它不会增强立即废弃的激励。然而，如果

潜在的好结果变得更好，这将提高维持期权活动的价值。

[10] 通过重复交易从而改变其成分并保持投资组合无风险的方法被称为“动态套利策略”，这在金融经济学中非常重要。我们将在第 4 章和第 5 章在连续时间的一般假定下扩展它。

[11] 对一些项目来讲，这是一种简化，通过先进行更多的工程研究，可以减少成本的不确定性。那么投资问题更复杂了，因为人们有三种选择而不是两种：现在就建设；进行工程研究，如果研究表明成本会下降就开始建设；或者完全放弃项目。

[12] 在技术术语中，这一结论就是詹森（Jensen）不等式的意义，结合这样的事实，即未来现金流的现值是利率的凸函数。詹森不等式认为，如果 x 是一随机变量，$f(x)$ 为 x 的凸函数，则 $E[f(x)]>f(E[x])$。这样，如果 x 的期望值保持不变，但是 x 的方差增大，$E[f(x)]$ 也将增大。如果下一年利率的期望值保持固定，但价值提高的不确定性存在，下一年获得的回报的预期现金贴现值将提高。

[13] 英格索尔和罗斯（Ingersoll and Ross，1992）已经发展了利率不确定条件下投资的一个连续时间模型，它推导出或多或少类似的结论。

[14] 原因不仅仅是对总电力需求增长的不确定性，还由于电厂现在经常发现它们自身在跟其他资源型的电厂进行竞争（如 cogeneration）。

[15] 这是索希尔（Sawhill，1989）所提供的例子的一个修订。

bbs.mldogu.com

上善若水股票论坛
bbs.miaogu.com

第Ⅱ篇

数学基础

上善若水股票论坛
bbs.miaogu.com

第3章 随机过程和伊藤引理

59

上善若水股票论坛
bbs.mjaogu.com

本章和下一章提供了本书其他部分将要用到的数学工具——随机积分（stochastic calculus）、动态规划（dynamic programming）及或有债权分析等（contigent claim analysis）。

利用这些工具，我们可以用连续时间方法研究投资决策，这种方法不仅在直观上很吸引人，而且确实有效。另外，我们这里所介绍的概念和技巧正在被广泛地应用于经济与金融的各个领域，即使不考虑它们在投资问题中的应用，这些方法本身也是很值得学习的。

本章从讨论随机过程开始。我们首先讨论简单的离散时间过程，然后讨论一类重要的连续时间过程——维纳过程（Wiener process）（或布朗运动，Brownian motion）。维纳过程是我们在本

书中建立的许多模型的基石。我们将解释维纳过程的概念与性质，并说明如何能把它从离散时间随机游动的连续极限中推导出来。然后，我们将说明维纳过程如何能推广到一类更广泛的连续时间过程，称为伊藤过程（Ito processes）。伊藤过程可以用来表示项目价值、产出价格、投入成本以及其他随时间推移随机地变动并影响投资决策的变量的动态变化过程。

我们将会看到，这些过程①在通常的意义下不能对时间求导，即我们不
60 能用普通微积分的计算规则来进行计算，而只能通过伊藤引理来进行。伊藤引理有时被称为随机积分的基本定理，是一个重要的结论，它使我们可以对随机过程的函数进行微分和积分。在本书中我们提供了伊藤引理的一种直观推导，并通过大量例子展示它如何用于维纳过程函数的简单运算。另外，我们还会看到伊藤引理如何用于随机微分方程的推导。接下来，我们还将介绍跳跃过程，即一类有不频繁的离散跳跃而不是连续波动的过程②，并说明如何利用伊藤引理的另一种形式来对它进行分析。最后，在本章附录中，介绍了柯尔莫哥洛夫方程（Kolmogorov equation），它描述了随机过程概率密度函数的动态变化。我们也介绍了柯尔莫哥洛夫方程的应用。

上普若木股票论坛 bbs.miaogu.com

3.1 随机过程

随机过程指与时间有关的一簇变量，在每一时刻其取值都是随机的。以波士顿城区的气温为例：气温随时间推移的变化中有一部分是确定的（气温在白天上升而在晚上下降，夏天时上升而冬天时下降等）；而有一部分变化是随机而不可预测的。③[1] IBM公司的股票价格是另一个例子：价格波动是随机的，但从长期来看，它又具有正的期望增长率以便能补偿投资者持有该股票的风险。

更正式地说，随机过程可由变量 x 随时间 t 变化的值 x_t 的概率分布来定义。因此，对给定的时间 $t_1 < t_2 < t_3$ 等，我们给出或能够算出 x_1，x_2，x_3 的相应值在某一定范围内的概率，如

① 可以看成关于时间 t 的随机函数，在时间 t 固定时为一个随机变量。——译者注

② 这类过程和前面提到的具有连续变化的过程不同。——译者注

③ 如在某一天某一时刻的气温。——译者注

$P(a_1 < x_1 \leqslant b_1, a_2 < x_2 \leqslant b_2, \cdots)$

当时刻 t_1 到来时，观察到的实际值为 x_1，我们可在现有信息（即 t_1 时刻取值为 x_1）的条件下通过条件概率来计算未来事件发生的概率。[2]

波士顿的气温和 IBM 的股票价格是随机过程的两个极不相同的例子。波士顿的气温是一个平稳过程（stationary process）。大致来讲，该变量（气温）的统计性质在相当长时间内不发生变化。[3]例如，尽管明天的预期气温会部分依赖于今天的气温，明年 1 月 1 日气温的期望和方差与今天的气温基本上是独立的，并且它也与两年以后、三年以后 1 月 1 日气温的期望和方差相等。而 IBM 的股票价格是一个非平稳随机过程（nonstationary stochastic process），该价格的期望值会毫无边界地提高，我们后面将会看到 T 年后价格的方差是随着 T 的延长而增大的。

波士顿的气温和 IBM 的股票价格都是**连续时间的随机过程**，这是指时间指标 t 是一个连续的变量（即使我们只能在离散的时间点去测量温度或股票价格，但这些变量是随时间而连续变化的）。尽管本书的工作大部分是在考虑连续时间的随机过程，但我们会从一些离散时间过程的例子出发。离散时间过程是指变量的变化仅在离散的时间点才发生，但 x_t 在逻辑上的所有可能取值（通常称为状态）可以是离散的也可以是连续的。一般来讲，我们在前面的定义足以包括所有这些可能性。

随机过程的一个最简单的例子是**离散时间、离散状态的随机游动**。设 x_t 始于已知值 x_0。在时刻 $t=1, 2, 3, \cdots$ 它分别以 $\frac{1}{2}$ 的概率发生向上或向下的跳跃，跃度均为 1。因为跳跃相互之间都是独立的，我们可以用式(3－1)来描述 x_t 在时刻 t 的动态变化：

$$x_t = x_{t-1} + \epsilon_t \tag{3-1}$$

式中，ϵ_t 为随机变量，其概率分布为

$$\text{prob}(\epsilon_t = 1) = \text{prob}(\epsilon_t = -1) = \frac{1}{2} \qquad (t = 1, 2, \cdots)$$

我们称 x_t 为离散状态过程，因为它只能取离散的值。①例如，若 $x_0 = 0$，当 t 为奇数时，x_t 的可能取值为$(-t, \cdots, -1, 1, \cdots, t)$；当 t 为偶数时，x_t 的可能取值为$(-t, \cdots, -2, 0, 2, \cdots, t)$。$x_t$ 的概率分布可由二项分布导出。对 t 62
次跳跃，其中有 n 次向下，而 $t-n$ 次向上的概率为

---

① 如…，－2，－1，0，1，2，3，…——译者注

$$\binom{t}{n}2^{-t}$$

因此，x_t 取值为 $t-2n$ 的概率为

$$\text{prob}(x_t=t-2n)=\binom{t}{n}2^{-t} \tag{3-2}$$

在下一节，我们将利用这个分布来导出维纳过程作为离散时间随机游动的连续极限。但是，在这里，注意到 x_t 的可能取值范围和方差会随 t 的增加而增加，因此，x_t 是一个非平稳的过程。

因为 x_t 向上或向下跳跃的概率都为 $\frac{1}{2}$，故 $t=0$（假设 $x_0=0$）时，对所有的 t，x_t 的期望值为零。（同样地，在时刻 t 时，对未来时刻 $T(>t)$，x_T 的期望为 x_t。）推广这个过程的一种方法是改变向上或向下跳跃的概率。令 p 为发生向上跳跃的概率，$q=1-p$ 为向下跳跃的概率，并且 $p>q$。这样的过程我们称之为带漂移的随机游动：在时刻 $t=0$，对未来时刻 $T>0$，x_t 的期望值大于零，并且随 T 的增加而增加。

对这个过程的另一种推广是考虑在任一时刻 t 的跃度为一连续随机变量。例如，我们令跃度为一服从均值为 0、标准差为 σ 的随机变量，这时，我们称 x_t 为离散时间连续状态的随机过程。

另一个离散时间连续状态随机过程的例子是一阶自回归过程（first-order autoregressive process），简记为 AR（1）。可由式（3-3）给出：

$$x_t=\delta+\rho x_{t-1}+\zeta_t \tag{3-3}$$

式中，δ 和 ρ 为常数，$-1<\rho<1$，并且 ζ_t 服从均值为 0 的正态分布。这个过程是平稳的，并且 x_t 的长期期望值为 $\frac{\delta}{1-\rho}$，而与其当前值无关。（这个长期均值可通过令式（3-3）中 $x_{t+1}=x_t=x$ 并对 x 求解而得到。）AR（1）过程经常也被称为均值回归过程，因为 x_t 趋向于恢复到它的长期期望值。在本章后面我们将考虑该过程在连续时间的情形。

随机游动（包括离散状态或连续状态，有漂移或无漂移的）和 AR（1）过程都满足马尔可夫性（Markov property），因而被称做马尔可夫过程
63 (Markov process)。马尔可夫性是指变量 x_{t+1} 的概率分布仅依赖于 x_t，而与 t 以前的状态或信息无关。如在由式(3-1)描述的随机游动中，若 $x_t=6$，则 x_{t+1} 分别以 $\frac{1}{2}$ 的概率等于 5 或 7。一旦我们知道了 x_t 的值，那么 x_{t-1}、x_{t-2}、…

的值对 x_{t+1} 的分布就是无关的。马尔可夫性是随机过程研究中一种非常重要的性质，因为它能极大地简化对随机过程的分析。我们转到连续时间过程时会很快认识到这一点。

3.2 维纳过程

维纳过程（又称为布朗运动）是一个连续时间过程，它具有三个重要性质。[4] (1) 它是一个马尔可夫过程。正如前面所解释的，该过程的所有未来值的概率只取决于其当前值，而不受该过程在过去的取值或其他当前信息的影响，因此，该过程的当前值就是作出其未来值最佳预测中所需的全部信息。(2) 维纳过程具有独立增量（independent increments）。这表示该过程在任一时间区间上变化的概率分布独立于其在任一（不相交）的其他时间区间上变化的概率。① (3) 维纳过程在任何有限时间区间上的变化服从正态分布（normally distributed），其方差随时间区间的长度呈线性增加。

马尔可夫性是维纳过程的一个十分重要的性质，它表明为预测过程的未
来路径，只有当前的信息是有用的。股票价格经常被模型化为马尔可夫过 64
程，这是因为公开的信息会很快地反映到股票价格中，因此过去的股票价格没有预测价值。（这里所描述的市场情况通常被称为弱市场有效性。如果弱市场有效性不成立，投资者可以通过技术分析来“击败市场”，即利用过去的股票价格模式来预测其未来价格。）维纳过程具有独立增量性，这一事实表示我们可以把它看做随机游动的连续时间版本，这种观点下面还会阐述。

上面所提到的三个性质（马尔可夫性、独立增量性以及增量的正态性）似乎限制太强，它表明现实世界中很少有变量能用维纳过程来被真实地模型化。例如，尽管假定股票价格满足马尔可夫性及独立增量性可能是合理的，但假定股票价格变化服从正态分布却并不合理，毕竟我们知道股票价格永远不会下降到低于零。更合理的假设是股票价格的变化服从对数正态分布，即价格取对数之后的变化服从正态分布[5]。但这恰好表示股票价格的对数可模型化为维纳过程，但股票价格本身并不是维纳过程。我们后面将会看到，

① 即在不相交的时间区间上，过程的增量相互独立。例如，若 $t_1<t_2<t_3<t_4$，则 $x(t_2)-x(t_1)$ 与 $x(t_4)-x(t_3)$ 相互独立。——译者注

通过适当的变换，维纳过程可以用做对随时间连续（或几乎连续）变化的一大批相当广泛的随机变量建模的基石。

用更标准的语言来重述维纳过程的三个性质是十分有用的。假设 $z(t)$ 为维纳过程，在时间区间 Δt 上 z 的任何变化都记为 Δz①，它满足下列条件：

（1）Δz 和 Δt 满足下列关系：

$$\Delta z = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$$

式中，ε_t 为均值为 0、标准差为 1 的正态分布的随机变量。

（2）随机变量 ε_t 是序列不相关的，即 $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$，对一切 $t \neq s$ 成立，故 Δz 在任意两个不同的时间区间上是相互独立的。（由此可推出 $z(t)$ 服从马尔可夫性和独立增量性。）

我们来考察这两个条件对 $z(t)$ 在某一有限区间 T 上的变化的影响。我们将该区间分为长为 Δt 的 n 个小区间，即 $n = \frac{T}{\Delta t}$。则 $z(t)$ 在该区间上的变化由式（3－4）给出：

$$z(s+T) - z(s) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \tag{3-4}$$

式中，ε_i 相互独立。由中心极限定理，我们可以证明该和（即 $z(s+T) - z(s)$）服从均值为 0、方差为 $n\Delta t = T$ 的正态分布。②其中最后一点是非常重要的，它来自这样一个事实，即 Δz 取决于 $\sqrt{\Delta t}$ 而不是 Δt；维纳过程中变化的方差随时间区间的长度线性增长。

65 这个性质我们后面将不断地用到。最后，注意维纳过程是非平稳的随机过程，长期来看其方差将趋于无穷。

令 $\Delta t \to 0$，维纳过程在时间区间无穷小时的增量 dz 可表示为

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt} \tag{3-5}$$

因 $\varepsilon_t \sim N(0,1)$，故 $E(dz) = 0$，$\mathrm{Var}(dz) = E[(dz)^2] = dt$。然而，注意到在普通微积分的意义下，维纳过程是不能对时间求导的。因为 $\frac{\Delta z}{\Delta t} = \varepsilon_t (\Delta t)^{-\frac{1}{2}}$，当 $\Delta t \to 0$ 时，$\frac{\Delta z}{\Delta t} \to \infty$，故导数不存在。

在实际中我们有时会遇到两个或两个以上的维纳过程，这时，我们对它

---

① 即 $\Delta z = z(t+\Delta t) - z(t)$。——译者注

② 因为 $z(t)$ 在区间 T 上的变化分解为一些独立同分布的随机变量的和，并且这些随机变量的期望和方差均有限。——译者注

们之间的协方差感兴趣。假定 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 为维纳过程，则我们记 $E(\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2)=\rho_{12}\,\mathrm{d}t$，其中 ρ_{12} 为两个过程的相关系数（coefficient of correlation）。由于维纳过程在单位时间上的方差和标准差都为 $\frac{E[(\mathrm{d}z)^2]}{\mathrm{d}t}=1$，所以 ρ_{12} 也是这两个过程在单位时间上的协方差。[6]

3.2.1 带漂移的布朗运动

我们前面提到维纳过程可以很容易地推广到更复杂的一些过程。对式（3-5）最简单的推广就是带漂移的布朗运动：

$$\mathrm{d}x=\alpha\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z \tag{3-6}$$

式中，$\mathrm{d}z$ 为前面定义过的维纳过程的增量；α 为漂移参数；σ 为方差参数。注意，在任何时间区间 Δt 上，x 的变化表示为 Δx，服从均值为 $E(\Delta x)=\alpha\Delta t$，方差为 $\mathrm{Var}(\Delta x)=\sigma^2\Delta t$ 的正态分布。

图 3—1 显示了式（3-6）表示的布朗运动的三条样本路径，其中 $\alpha=0.2$，标准差 $\sigma=1.0$。图形是以年为单位显示的（1950—2000 年），产生每条样本路径所使用的时间区间 Δt 为 1 个月，利用式（3-7）计算 x_t 的样本路径。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

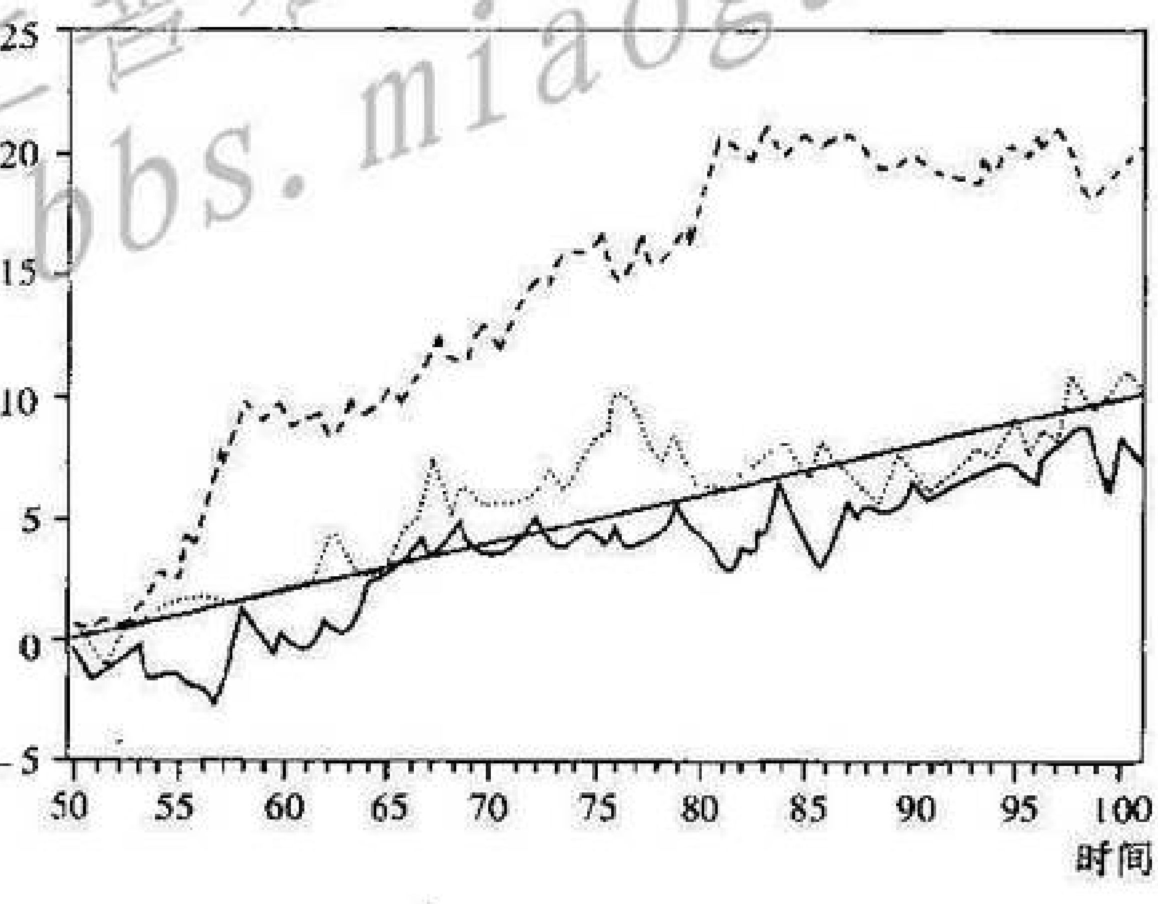


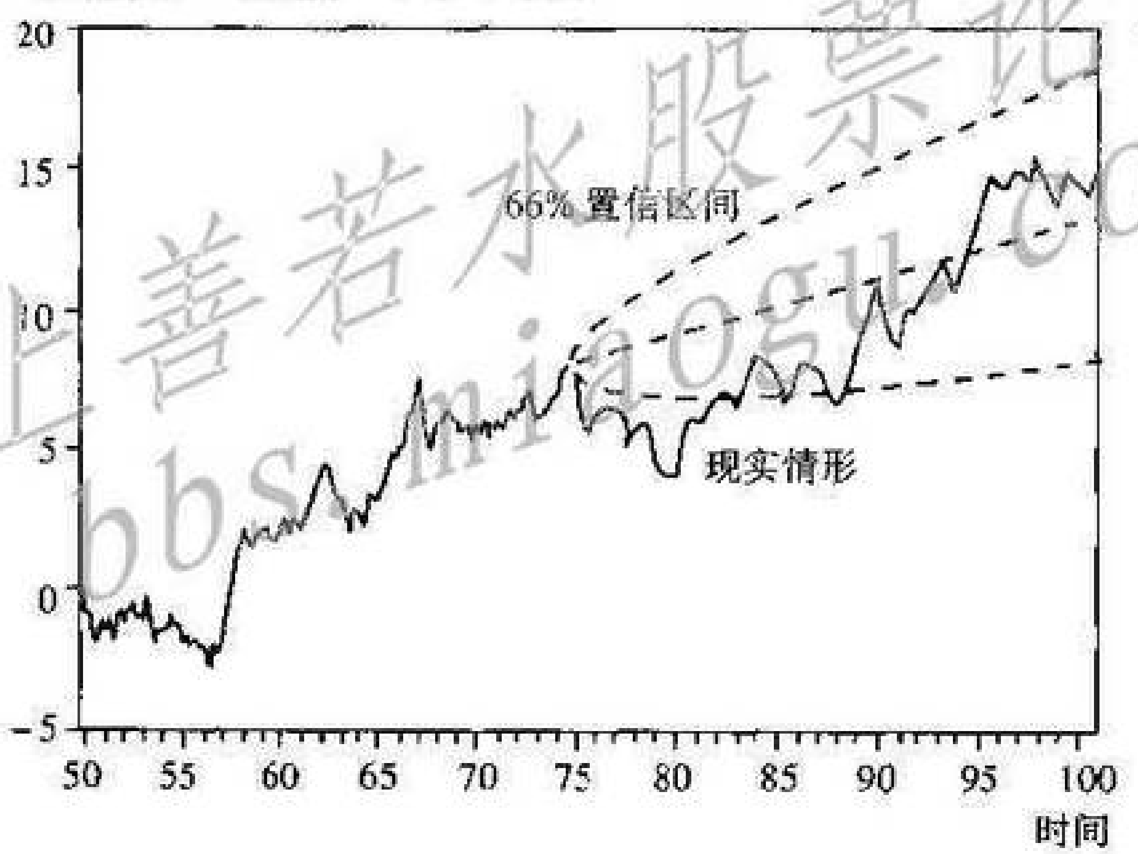
图 3—1 带漂移的布朗运动的样本路径

$$x_t = x_{t-1} + 0.01667 + 0.2887\varepsilon_t \quad (3-7)$$

式中 $x_{1950}=0$。在式（3－7）中，对任意时刻 t，ε_t 服从标准正态分布（注
66 意式（3－7）中的参数 α，σ 是以月为单位的，每年 0.2 的增长趋势表明每月的增长趋势是 0.016。每年有 0.1 的标准差表明每年的方差也是 0.1，故每月的方差为 $\frac{1}{12}=0.0833$，因此，每月的标准差为 $\sqrt{0.0833}=0.2887$）。图中所示的趋势线是式（3－7）中 $\varepsilon_t=0$ 时的直线。

图 3—2 显示了对同一随机过程的最优预测。其中，样本路径产生的是从 1950—1970 年末，同样采用式（3－7），所构造的 $x(t)$ 的预测是从 1975—2000 年。（为了比较预测效果，我们同样产生了该随机过程从 1970—2000 年的样本路径。）由于布朗运动的马尔可夫性，我们仅需要 x_t 在 1974 年 12 月的值来进行后面的预测。1974 年 12 月以后第 T 月的预测值为

$$\hat{x}_{1974+T} = x_{1974} + 0.01667T$$



上善若水股票论坛 bbs.missogu.com

图 3—2　带漂移的布朗运动的最优预测

图形同样显示了预测值的 66% 置信区间，也就是 $x(t)$ 的预测路径加上或减去一个标准差。（$x(t)$ 的 95% 置信区间为预测路径加上或减去
67 1.96 倍标准差。）又因为维纳过程的方差是随时间期限而线性增长的，故其标准差是随时间期限 t 以 $\sqrt{t}$ 的速度增长的。因此，T 月后 66% 的置信区间为

$$x_{1974}+0.01667T\pm0.2887\sqrt{T}$$

读者可用同样的方法构造95%或90%的置信区间。

由图3—1和图3—2可以看出，从长期来看，趋势项是布朗运动的主要决定因素，而在短期内，过程的波动决定了布朗运动。这正是下述事实的意义：x_t-x_0的均值为αt，其标准差为$\sigma\sqrt{t}$；当t很大时，$\sqrt{t}\ll t$，故过程主要由t的系数决定；而当t很小时①，$\sqrt{t}>t$，这时过程主要由$\sqrt{t}$的系数决定。考虑$\alpha>0$时$x_t<x_0$的概率也可以证明这一点：对很大的t，这个概率非常小；而对很小的t，这个概率接近$\frac{1}{2}$。

带漂移的布朗运动是一个非常简单却又十分重要的随机过程，因此有必要清楚地掌握它。在这里，维纳过程的定义及其在式（3-6）中所推广的性质好像显得有些随意。例如，为什么dx依赖于$\sqrt{dt}$而不直接依赖于dt？x在任一有限区间上的预期变化服从正态分布是否合理？使式（3-6）及其性质更加生动有趣的方式是说明它如何与离散时间的随机游动联系在一起的。下面我们来叙述这一问题。

3.2.2 布朗运动的随机游动表示 68

本节我们将说明式（3-6）如何能从离散时间的随机游动的连续极限中推导出来。[7]为说明这一点，我们将时间t按长度Δt分解为$\frac{t}{\Delta t}$个时间区间。假设在每一时间区间中变量x增加或减少数量Δh，x增加的概率为p，减少的概率为$1-p$。假设初始点为x_0，图3—3显示了x在三个阶段中每一阶段的可能取值。对t和x的每种可能组合，x_t达到某点的概率同样标在了图中。注意到从每一阶段到下一阶段，随机变量Δx的可能取值为$\pm\Delta h$。并且x还是一个具有独立增量的马尔可夫过程。这是因为x的未来取值的概率分布仅依赖于其当前取值，并且在每一阶段内，x增加或减少的可能性独立于前一阶段所发生的情形。

下面我们考察x在未来取值的分布。首先注意Δx的均值为$E(\Delta x)=$ 69
$(p-q)\Delta h$，并且有

$$E[(\Delta x)^2]=p(\Delta h)^2+q(-\Delta h)^2=(\Delta h)^2$$

---

① 如$0<t<1$。——译者注

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

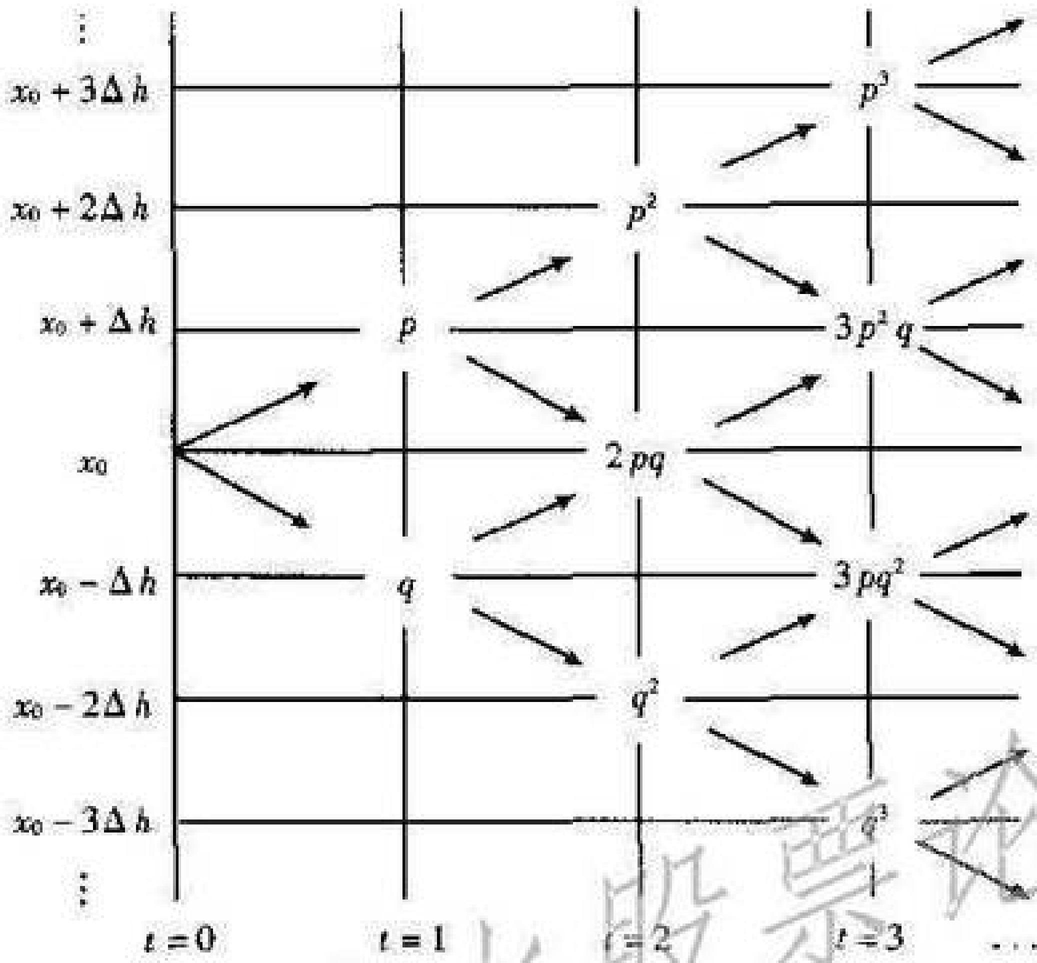


图 3—3 布朗运动的随机游动表达式

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

因此，Δx 的方差为

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\Delta x) &= E[(\Delta x)^2]-(E[\Delta x]^2)\\ &=[1-(p-q)^2](\Delta h)^2\\ &=4pq(\Delta h)^2\end{aligned} \tag{3-8}$$

长度为 t 的时间区间有 $n=\dfrac{t}{\Delta x}$ 个离散步骤。因为随机游动的连续步骤相互之间是独立的，累积变化 x_t-x_0 服从二项分布，其均值为

$$n(p-q)\Delta h=t(p-q)\frac{\Delta h}{\Delta t}$$

其方差为

$$n\ [1-\ (p-q)^2]\ (\Delta h)^2=\frac{4pqt\ \ (\Delta h)^2}{\Delta t}$$

为解释这一点，考虑由 n 次独立试验组成的序列，其中试验成功记作 1，发生概率为 p；试验失败记作 0，发生概率为 $q=1-p$。n 次试验中成功的次数服从均值为 np、方差为 npq 的二项分布（Feller，1968，p.223，p.238）。上面的表述是可以类比的。例如，若把成功记作 Δh，将失败记作 $-\Delta h$，则在［0，t］时间内方差为$4(\Delta h)^2$ 乘以一般二项式的方差。

迄今为止，概率 p 和 q 与增量 Δh 和 Δt 都是任意选取的。这里，我们希望令 $\Delta t\to 0$。这样做是希望 x_t-x_0 的均值和方差保持不变，且独立于 p，q，Δh 和 Δt 的特定选择。另外，我们将以极限形式得到式(3－6)。我们可以确保这就是事实。若令

$$\Delta h=\sigma\sqrt{\Delta t} \tag{3-9}$$

及

$$p=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right)$$
$$q=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right) \tag{3-10}$$

那么

$$p-q=\frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t}=\frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h$$

将 Δh 和 $p-q$ 的这些表达式代入前面关于 x_t-x_0 的均值和方差的公式，并令 $\Delta t\to 0$。对任一有限的 t，随机游动的步骤 n 将趋于无穷，则该二项分布 70
将收敛于一个正态分布，该正态分布的均值为

$$t\frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h\frac{\Delta h}{\Delta t}=\alpha t$$

其方差为

$$t\left[1-\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^2\Delta t\right]\frac{\sigma^2\Delta t}{\Delta t}\to\sigma^2 t$$

这些，实际上正是我们所需要的有关布朗运动的值，α 为其单位时间内的漂移，σ^2 为其单位时间内的方差。在 $\Delta t\to 0$ 时取极限，x_t-x_0 的均值和方差都独立于 Δh 和 Δt。

那么，我们看到，当时间区间和步长一同趋于零而保持式（3－9）中的关系时，布朗运动是随机游动的一种极限。更进一步，Δh 和 Δt 之间的这种联系并不是任意的；这是保持 x_t-x_0 的方差仅取决于 t 而不取决于步骤数量的唯一途径。因此，为什么在式（3－6）中 $\mathrm{d}x$（通过 $\mathrm{d}z$）取决于 $\mathrm{d}t$ 的平方根而非 $\mathrm{d}t$ 现在就很清楚了；为什么 x 在有限时间段内的变化是正态分布现在也应当很清楚了，因为步骤数量变得很大时，二项分布趋近于正态分布。

布朗运动有一个有趣的性质：当 $\Delta t\to 0$ 时，在任何一个有限时间区间内，服从布朗运动的粒子经过的轨迹的长度为无穷大。实际上这可由 Δh 和 Δt 的联系中得到。因 $|\Delta x|=\Delta h$（确定），$E(|\Delta x|)=\Delta h$，在长为 t 的时间区

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

间内，粒子经过路径的预期总长度为

$$n\Delta h = t\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{t\sigma}{\sqrt{\Delta t}}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，上面的式子将趋近于∞。类似地，$\frac{\Delta x}{\Delta t} \to \pm\infty$，取决于 $\Delta x = +\Delta h$ 或 $-\Delta h$。那么布朗运动的样本路径必定包含许多向上和向下的运动，这看起来非常像锯齿。这样的路径是不可微的，即 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 不存在，当然也不能提供 $E\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$。但 $E(\mathrm{d}x)$ 一般来说是存在的，因此，$E\frac{(\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}t}$ 也是存在的。

3.3 广义布朗运动——伊藤过程

维纳过程可用做对许多广泛的随机变量建模的基石。我们将考察一些例
71 子，它们都是我们前一节所研究过的带漂移的布朗运动的推广的情形。其形式为

$$\mathrm{d}x = a(x,t)\mathrm{d}t + b(x,t)\mathrm{d}z \tag{3-11}$$

式中，$\mathrm{d}z$ 为维纳过程的增量；$a(x,t)$ 和 $b(x,t)$ 为已知的（非随机的）函数。这里的漂移系数和方差系数是当前状态和时刻的函数。由式（3－11）所表示的连续时间随机过程 $x(t)$ 称为**伊藤过程**。

考虑伊藤过程增量的均值与方差，因 $E(\mathrm{d}z)=0$，故 $E(\mathrm{d}x) = a(x,t)\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}x$ 的方差为 $E[\mathrm{d}x^2] - E(\mathrm{d}x)^2$，其中含有 $\mathrm{d}t$，$(\mathrm{d}t)^2$ 和 $(\mathrm{d}t)(\mathrm{d}z)$（由式（3－5）知其阶为 $(\mathrm{d}t)^{\frac{3}{2}}$）项。对无穷小的 $\mathrm{d}t$，含 $(\mathrm{d}t)^2$ 和 $(\mathrm{d}t)^{\frac{3}{2}}$ 的项可忽略不计，故阶为 $\mathrm{d}t$ 的项的方差为

$$\mathrm{Var}(\mathrm{d}x) = b^2(x,t)\mathrm{d}t$$

我们将 $a(x,t)$ 看做伊藤过程的瞬间期望**漂移率**（drift rate），而 $b^2(x,t)$ 则看做方差的瞬间**变动率**（variance rate）。

3.3.1 几何布朗运动

式（3－11）的一个重要的例子是带漂移的几何布朗运动，即 $a(x,t) = \alpha x$，$b(x,t) = \sigma x$，其中 α，σ 均为常数。这时式（3－11）变为

$$\mathrm{d}x = \alpha x\mathrm{d}t + \sigma x\mathrm{d}z \tag{3-12}$$

从对式（3－6）中的简单布朗运动的讨论中，我们知道 x 的变化率$\frac{\Delta x}{x}$服从正态分布。由于变化是 x 的自然对数的变化，因此，x 的绝对变化 Δx 服从对数正态分布（lognormally distributed）。

在这里，x 与其对数在某种程度上有着更复杂的关系。在下一节，我们将证明若 $x(t)$由式（3－12）给出，则 $F(x)=\log x$ 服从下面的带漂移的简单布朗运动：

$$dF=\left(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right)dt+\sigma dz \tag{3-13}$$

因而在有限时间区间 t 上，$\log x$ 的变化服从均值为$\left(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t$，方差为 $\sigma^2 t$ 的正态分布。对于 x 自身，可以证明，若当前的 $x(0)=x_0$，则 $x(t)$的期望值为

$$E[x(t)]=x_0e^{\alpha t}$$

$x(t)$的方差为[8]　　72

$$\text{Var}[x(t)]=x_0^2e^{2\alpha t}(e^{\sigma^2 t}-1)$$

关于几何布朗运动的期望的结果可用来计算 $x(t)$在一段时间内的期望贴现值。例如，若贴现率 r 超过增长率 α，我们有

$$E\left[\int_0^\infty x(t)e^{-rt}dt\right]=\int_0^\infty x_0e^{-(r-\alpha)t}dt=\frac{x_0}{r-\alpha} \tag{3-14}$$

这是一个有用的公式。后面章节中将证明这一结果非常有用。我们将用它来计算服从几何布朗运动的利润流的贴现值。

几何布朗运动常用于构造证券价格、利率、工资率、产出价格以及其他经济和金融变量的模型。图 3—4 显示了式（3－12）的三条样本路径，其漂移率 $\alpha=0.09$，即每年变动 9%；标准差 $\sigma=0.2$，即每年变动 20%。选择这些参数的原因是它们近似于纽约股票交易指数每年的预期增长率和标准差变动率。与图 3—1 一样，在产生样本路径时所选择的时间长度 Δt 为 1 个月，则 $x(t)$可用式（3－15）来计算：

$$x_t=1.0075x_{t-1}+0.0577x_{t-1}\varepsilon_t \tag{3-15}$$

式中，$x_{1950}=100$，在每一时刻来自均值为 0、方差为 1 的正态分布。图中还显示出趋势线，即 $\varepsilon_t=0$ 时的式（3－15）。注意到这些样本路径中有一条显示股票市场的表现超过了其预期增长率，但是其他两条的表现则明显低于预期增长率。

73

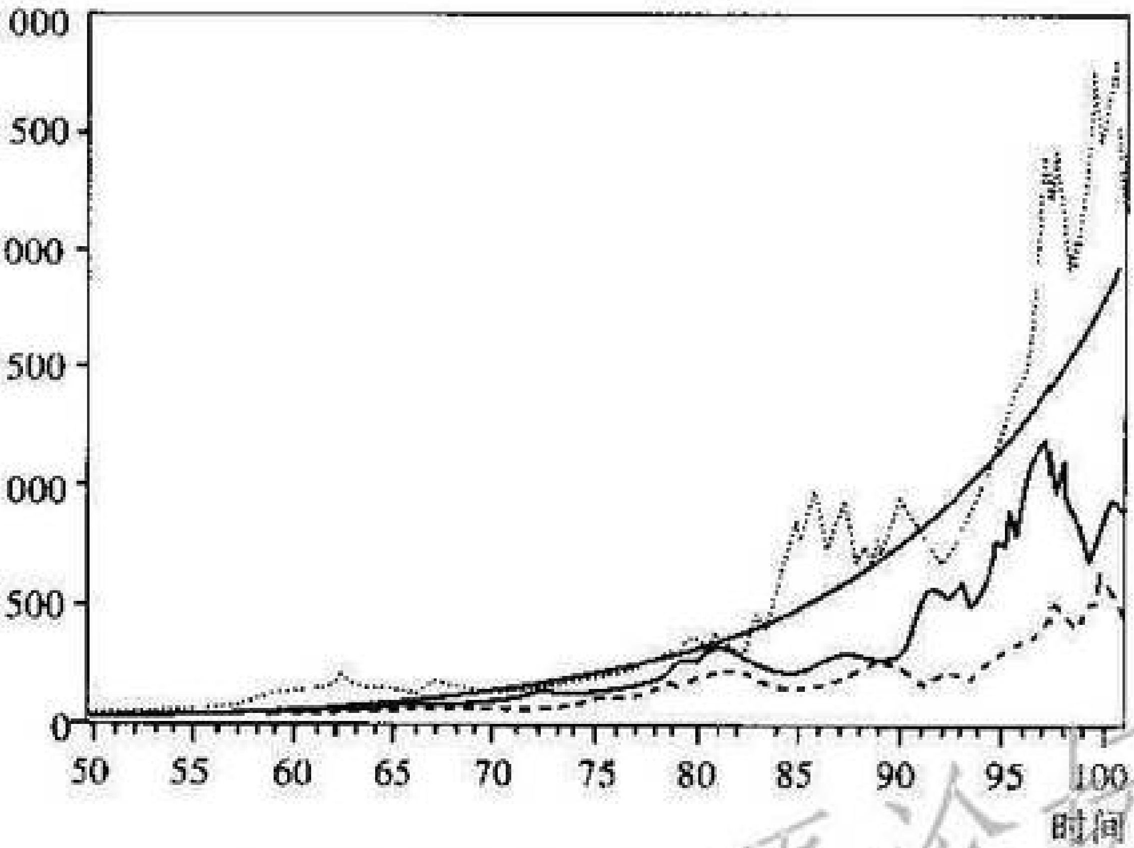


图 3—4　几何布朗运动的样本路径

图 3—5 显示了该过程的最优预测。与以前一样，产生的样本路径是从 1950—1974 年末，$x(t)$的预测建立在 1975—2000 年的状态之上。为进行比较，图中还显示了现实情况，即样本路径的延拓。由马尔可夫性，我们仅需要$x(t)$在 1974 年 12 月的值来进行预测。x 的预测值由下式给出：

$$\hat{x}_{1974+T} = (1.0075)^T x_{1974}$$

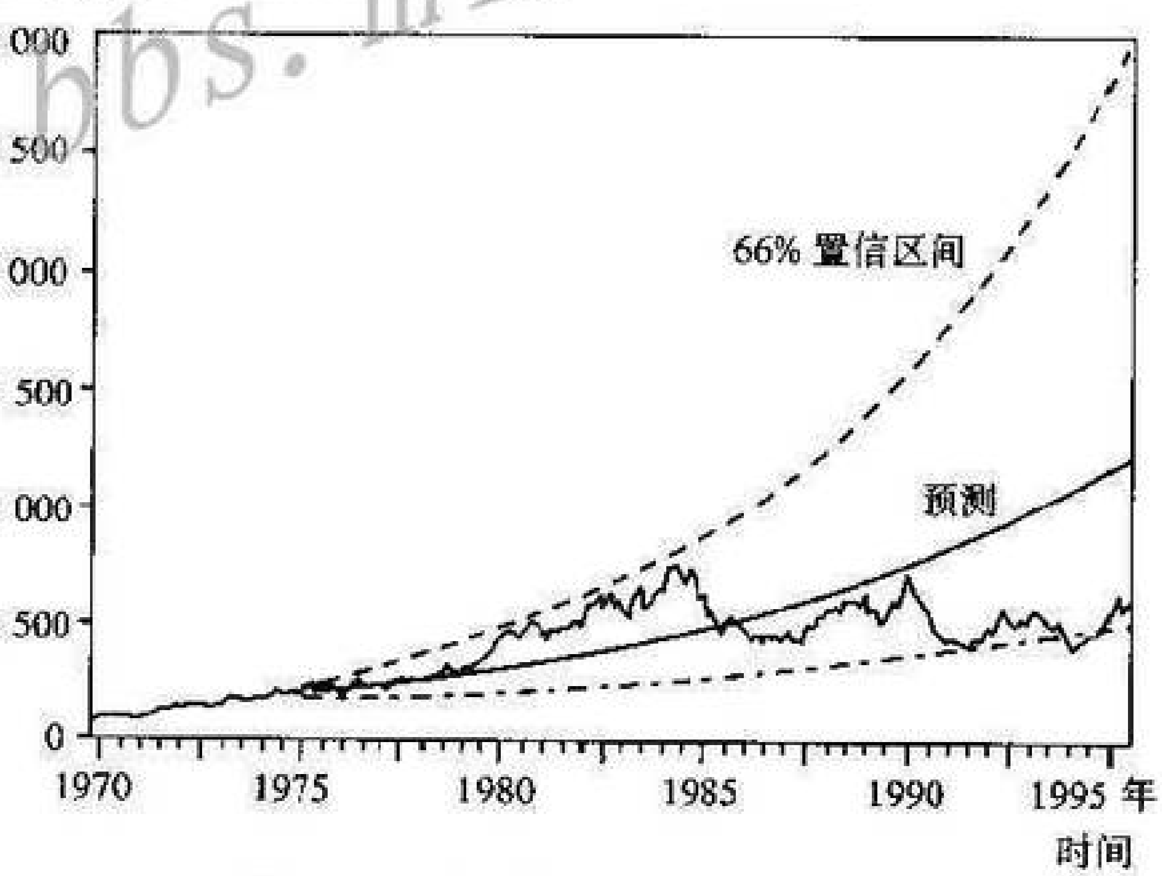


图 3—5　几何布朗运动的最优预测

式中，T 为从 1975 年 1 月开始所经过的月数。图中还给出了置信度为 66% 的预测置信区间。因 x 的变化率的标准差与 $\sqrt{t}$ 成正比，我们可给出该置信区间的上下限： 74

$$(1.0075)^T(1.0577)^{\sqrt{T}}x_{1974} \sim (1.0075)^T(1.0577)^{-\sqrt{T}}x_{1974}$$

这个预测区间是很宽的。对图中所示的这一样本路径，股票市场的实际表现差于其预测值。

3.3.2 均值回归过程

如图 3—1 和图 3—4 所示，布朗运动的样本路径趋于背离其出发点。这一性质对某些经济变量（如投机的资产价格）是现实的，但对别的经济变量却不一定成立，如铜、原油等某些原材料的价格等。尽管这些商品的价格经常被模型化为几何布朗运动，但这些价格以某种方式与长期边际生产成本相联系。换句话说，尽管在短期内石油价格会随机地上下波动（作为对石油输出国中的战争或革命的反应而变动，或作为对欧佩克（石油输出国组织）卡特尔的巩固或削弱的反应而变动）。但从长期来看，石油价格将回到生产石油的边际成本。因此，石油价格应该模型化为**均值回归**（mean-reverting process）过程。

bbs.miaogu.com

最简单的均值回归过程——O-U 过程（Ornstein-Uhlenbeck process）可用式（3－16）来表示：

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \quad (3-16)$$

式中，η 为向均值回归的速度；$\bar{x}$ 为 x 的“正常”水平，即 x 所要回归的值（若 x 是商品价格，则 $\bar{x}$ 可能是生产该商品的长期边际成本）。注意到 x 的预期变化取决于 x 与 $\bar{x}$ 之间的差异，若 $x > \bar{x}$（$< \bar{x}$），则在下一段时间内 x 更容易下跌（上涨）。由此可知，尽管 O-U 过程满足马尔可夫性，但并不具有独立增量性。

若 x 的当前值为x_0，$x(t)$服从式（3－16），则 x 在未来任一时间 t 的期望值为

$$E(x_t) = \bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-\eta t} \quad (3-17)$$

另外，$x_t - \bar{x}$ 的方差为 75

$$\mathrm{Var}(x_t - \bar{x}) = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta t}) \quad (3-18)$$

（式（3－17）和式（3－18）的推导参见本章附录。）从这些公式可以看出，

当 t 变大时，x_t 的期望值收敛于 $\bar{x}$，其方差收敛于$\frac{\sigma^2}{2\eta}$。此外，当 $\eta\to\infty$时，$\mathrm{Var}(x_t)\to 0$。这表示 x 将永远不会偏离 $\bar{x}$。最后，当 $\eta\to 0$ 时，x 成为简单布朗运动，且 $\mathrm{Var}(x_t)\to\sigma^2 t$。

对不同的 η 值，图 3—6 显示了式（3－16）的四条样本路径。在每种情形下（以月为单位），$\sigma=0.05$，$\bar{x}=1$，$x(t)$的初始值 $x_0=1$。第一条路径的 $\eta=0$，对应于无漂移的简单布朗运动。注意，此时 $x(t)$趋向于远离其初始值。其他几条样本路径对应于 $\eta=0.01$，0.02 和 0.5。注意，η 越大，x_t 越不会背离 $\bar{x}$。当 $\eta=0.5$ 时，$x(t)$仅在 $\bar{x}$ 附近做短期小距离漂移。

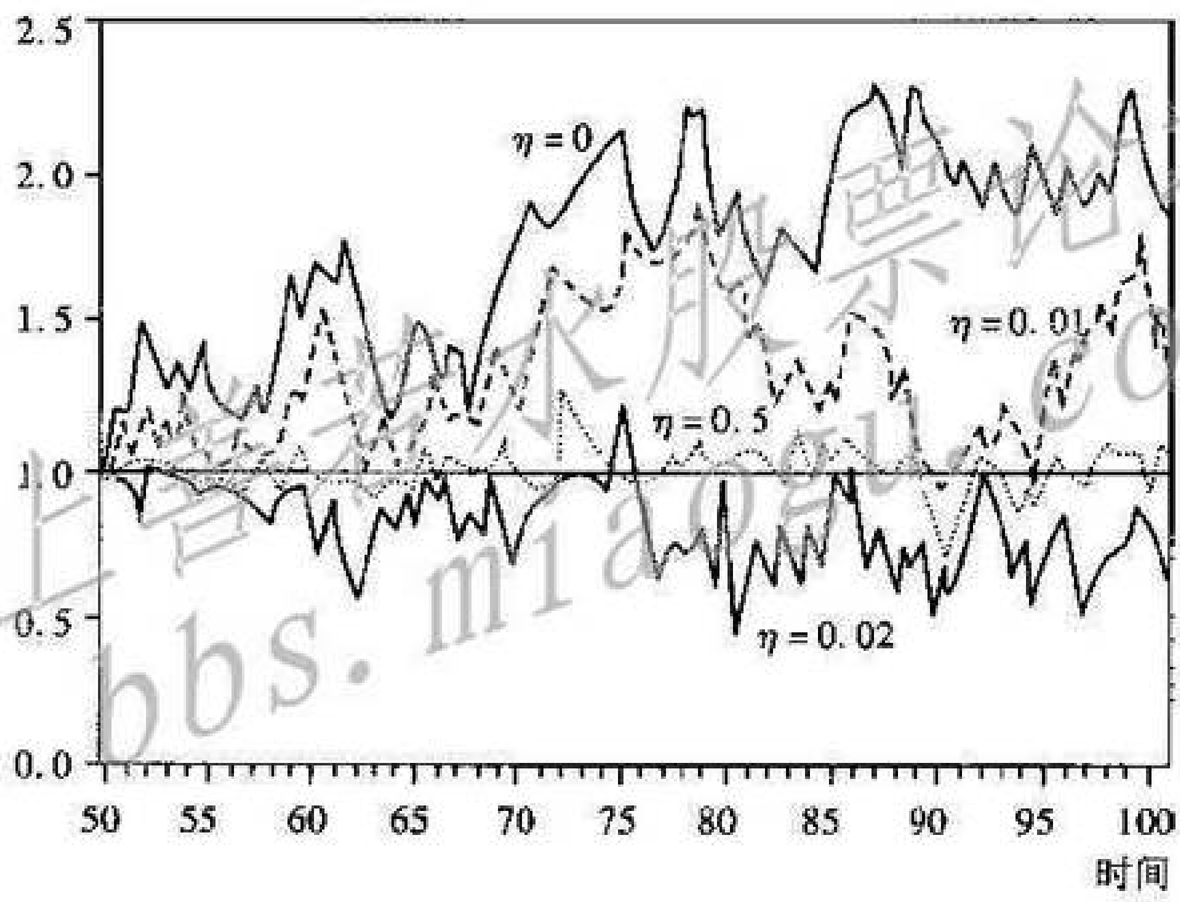


图 3—6　均值回归过程的样本路径：$dx=\eta(\bar{x}-x)dt+\sigma dz$

图 3—7 显示了 $\eta=0.02$ 时该过程的最优预测。图中的样本路径产生于 1950—1980 年底，x_t 的预测值是从 1981—2000 年。为进行比较，x_t 在 1981—2000 年的样本路径也同样显示出来。图中也显示了预测的 66％的置信区间。注意到经过四五年之后，预测的方差收敛到$\frac{\sigma^2}{2\eta}=\frac{0.0025}{0.04}=0.065$，因此，66％的预测区间（即预测值 ± 一个标准差）收敛到预测值 $\hat{x}\pm\sqrt{0.065}=\hat{x}\pm 0.25$。

76

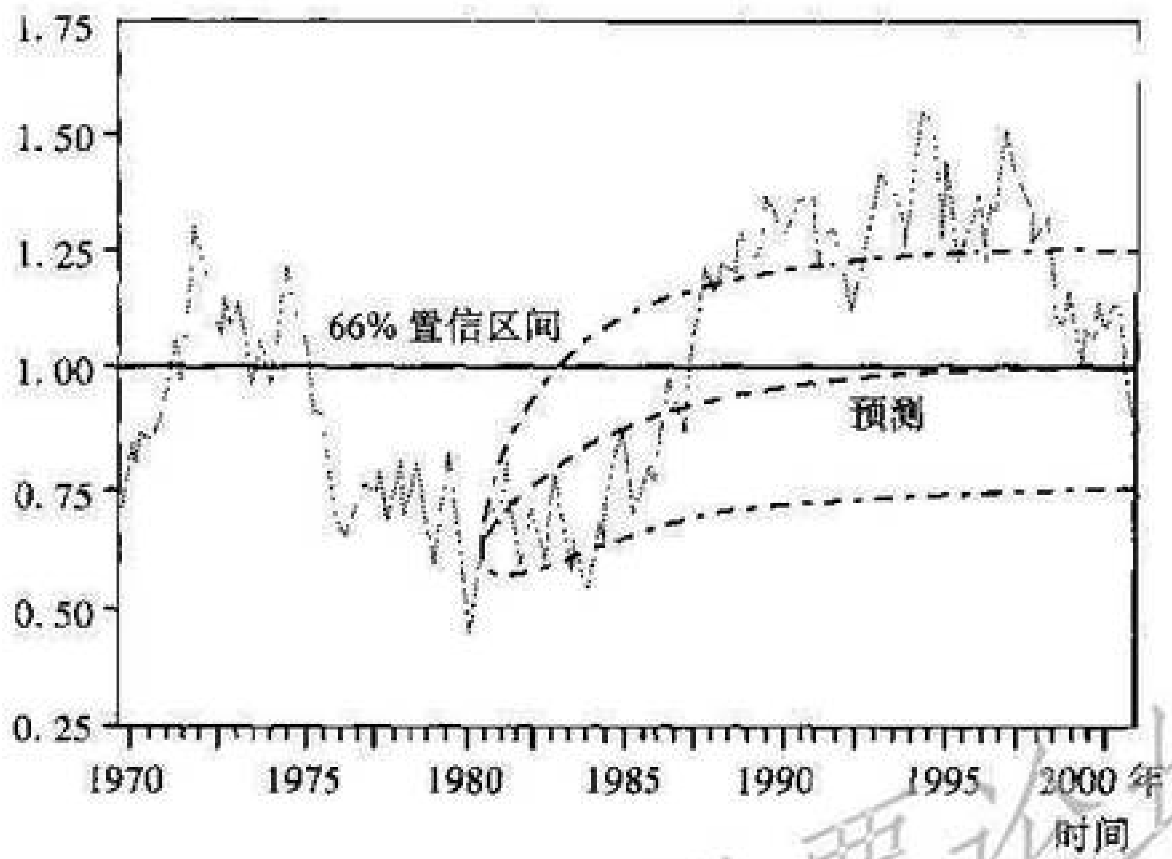


图 3—7 均值回归过程的最优预测

式（3－16）是离散时间的一阶自回归过程的连续时间版本。明确地说，式（3－16）是下述AR(1)过程在 $\Delta t \to 0$ 时的极限：

$$x_t - x_{t-1} = \bar{x}(1-e^{-\eta}) + (e^{-\eta}-1)x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3-19}$$

式中，$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$，$\sigma_\varepsilon^2 = \dfrac{\sigma^2}{2\eta}(1-e^{-2\eta})$。

因此，利用离散数据（实际也只能得到离散数据）进行下述回归可以估计出式（3－16）中的参数：

$$x_t - x_{t-1} = a + bx_{t-1} + \varepsilon_t$$

求得参数 $\hat{a}$，$\hat{b}$，则 $\bar{x} = -\dfrac{\hat{a}}{\hat{b}}$，$\hat{\eta} = -\log(1+\hat{b})$，且 77

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{\frac{\log(1+\hat{b})}{(1+\hat{b})^2-1}}$$

式中，$\hat{\sigma}_\varepsilon$ 为回归方程的标准差。

我们可以简单地对式（3－16）进行推广。例如，我们希望 $x(t)$ 回归到式（3－16）中的 $\bar{x}$，同时，方差变动率也随着 x 增长。这时，我们可使用下述过程：

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma x dz \tag{3-20}$$

另外，变量的百分比变化也可用简单的均值回归过程来描述。这等价于用过程

$$dx = \eta x(\bar{x} - x)dt + \sigma x dz \tag{3-21}$$

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

来描述 x_t。在本书后面我们将考察不同的均值回归过程对投资决策问题的影响。

结束本节前我们回顾一下前面提出的问题：几何布朗运动和均值回归过程哪个能更好地为原材料和其他商品的价格建模。解决这个问题的一种方法是检查问题中价格变量的数据，特别是估计式（3－19）并检验方程右边 x_{t-1} 的系数是否显著地异于零。关于这个检验有两个问题：(1)当式（3－19）右边 x_{t-1} 的系数为零的零假设成立时（因此 x_t 为随机游动），其普通最小二乘估计量对零是有偏的。因此，我们不能采用标准的 t 检验去检验该估计量是否显著地异于零。然而另一种检验，称为单位根检验(unit root test)，可以很方便地用于这种情形。[9] (2)通常需要许多年的数据才能以一定的置信度确定一个变量是否真的是回归均值的。

图 3—8 和图 3—9 显示了过去 120 年的原油价格和黄铜价格(以 1967 年美元的不变价格计算)。[10] 从图中大致可看出这些价格是回归均值的，但回归均值的速度非常慢。对数据进行单位根检验可证实这一点。对 120 年的数据进行单位根检验，我们可轻易地拒绝价格服从随机游动的假设，即数据确认这些价格是回归均值的。然而，若只用过去三四十年的数据进行单位根检验，我们不能拒绝价格服从随机游动的假设。这看来是许多其他经济变量所面临的问题，只用 30 来年的数据在统计上很难区分到底是随机游动还是均值回归过程。

78

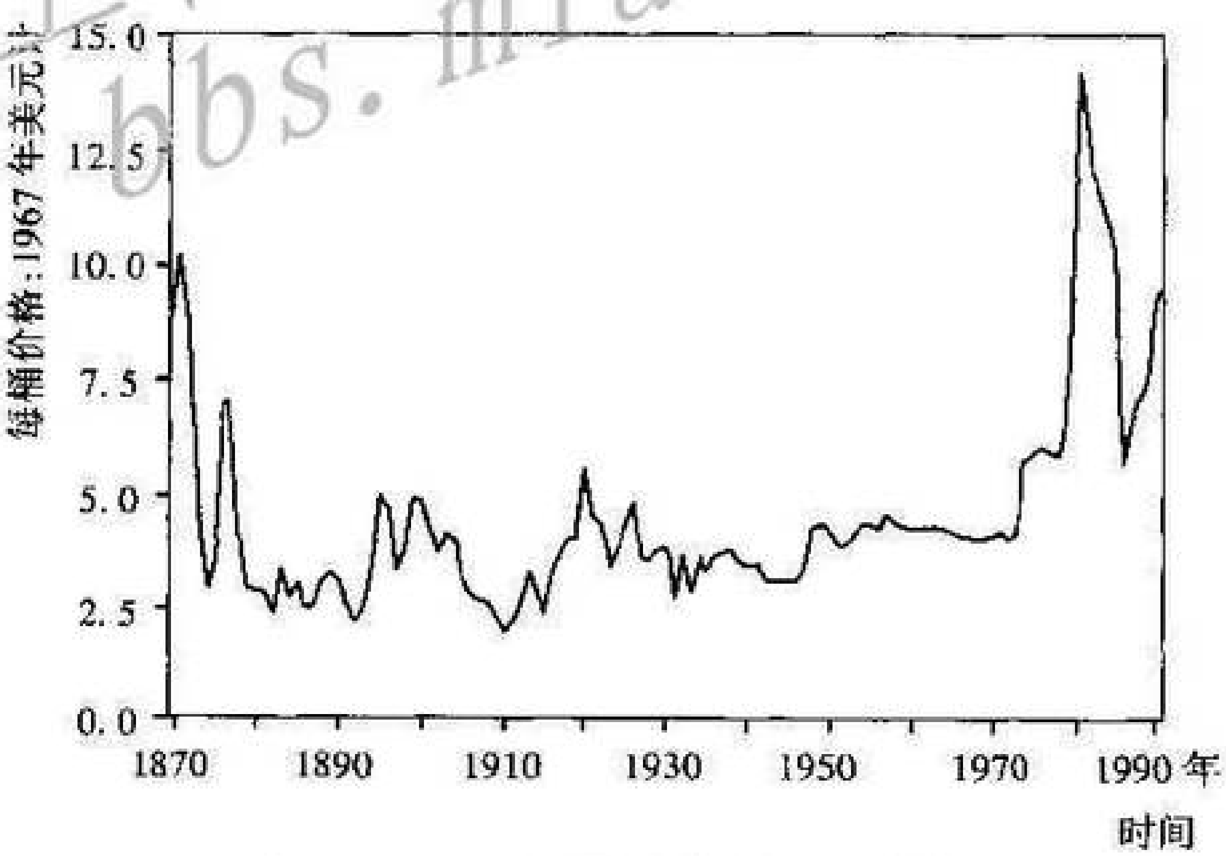


图 3—8　1967 年美元计的每桶原油价格

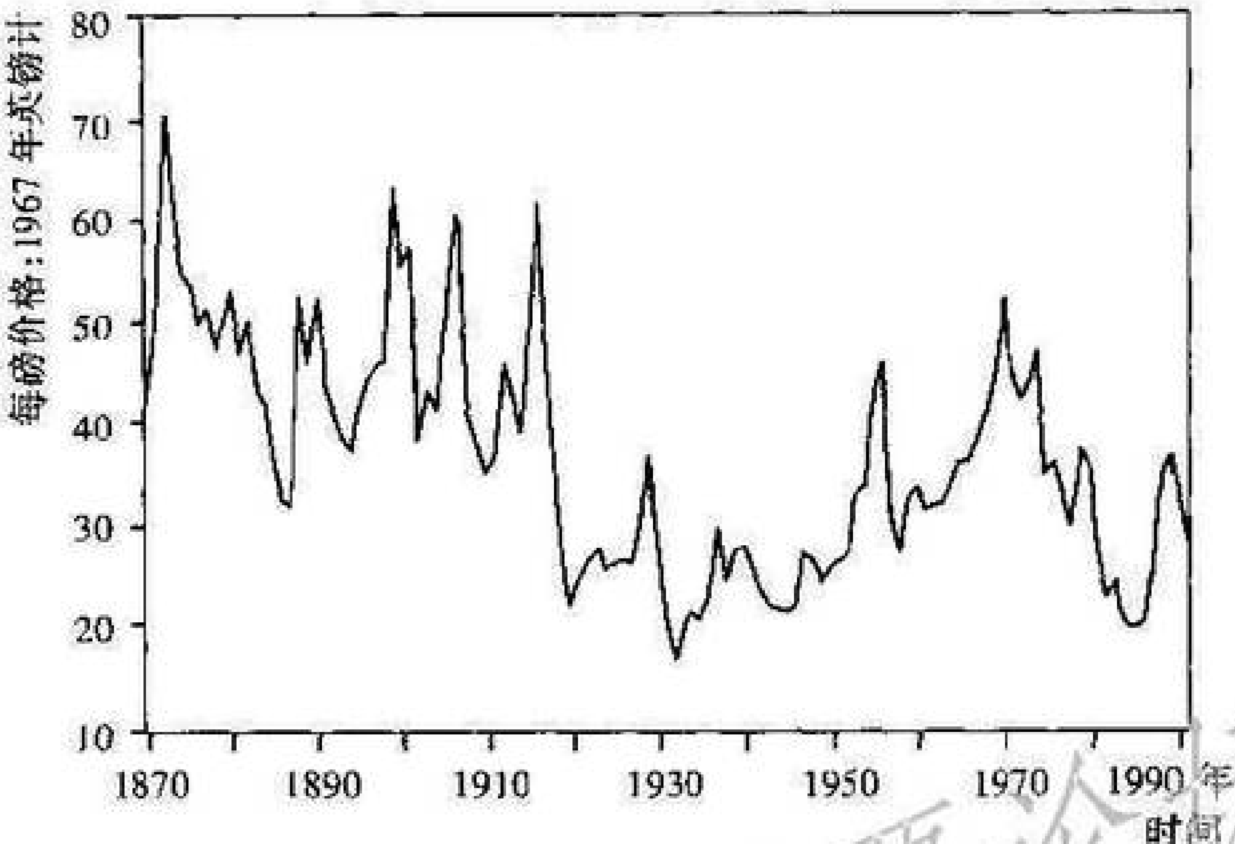


图 3—9 1967 年英镑计的每磅黄铜价格

因此，在决定是否用均值回归过程来为价格或其他经济变量建立模型时，更多的时候我们往往依靠理论的假设（如对经济机制均衡的直观考察）而不是统计的检验。建立模型要考虑的另一个标准是分析的可操作性。在后面的章节中我们可以看到，利用几何布朗运动来建立模型时，评价一个项目和寻找一种最优投资规则要简单得多。[11]

3.4 伊藤引理 79

我们已经知道式（3－11）所表示的伊藤过程对时间是连续的，但又不可微。然而在实际中我们经常要处理关于伊藤过程的函数，并且希望求得这些函数的导数。例如，我们希望描述投资于铜矿的某种期权价格，该价格为市场上黄铜价格的函数，而黄铜的价格可用几何布朗运动来描述。在这种情形下，我们想确定期权价格所服从的随机过程。为做到这一点，我们往往需要对伊藤过程的函数进行积分或微分，这时我们需要利用**伊藤引理**。

我们可以简单地将伊藤引理看做一种泰勒（Taylor）展开式，这是非常容易理解的。假设 $x(t)$服从式(3－11)表示的过程，考虑函数$F(x,t)$对 x

至少是二阶可微的，对 t 为一阶可微。我们希望求出该函数的全微分 dF。普通微积分的规则是以 x 和 t 的一阶变化来定义这一微分的：

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial t}dt$$

80 若假设我们也包括 x 的高阶微分，则

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(dx)^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(dx)^3+\cdots \tag{3-22}$$

在普通微积分中，这些高阶项在取极限时可忽略。为说明这一点在当前是否仍然成立，展开式（3－22）右边的第三项与第四项。首先代人关于 dx 的式（3－11）来确定 $(dx)^2$：

$$(dx)^2=a^2(x,t)(dt)^2+2a(x,t)b(x,t)(dt)^{\frac{3}{2}}+b^2(x,t)dt \tag{3-23}$$

$(dt)^{\frac{3}{2}}$和 $(dt)^2$ 是 dt 的高阶无穷小量，我们忽略这些项，并记

$$(dx)^2=b^2(x,t)dt$$

至于式（3－22）右边第四项中，$(dx)^3$ 的展开式中每一项关于 dt 的阶数均大于1，故在极限条件下，比 dt 更快地趋于零。对更高阶的任何项，如 $(dx)^4$ 等，这一点都是成立的。因此，伊藤引理给出 dF 的微分为

$$dF=\frac{\partial F}{\partial t}dt+\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(dx)^2 \tag{3-24}$$

将关于 dx 的式（3－11）代人，我们还可以将上面的展开式重新记为

$$dF=\left[\frac{\partial F}{\partial t}+a(x,t)\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{1}{2}b^2(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]dt+b(x,t)\frac{\partial F}{\partial x}dz \tag{3-25}$$

与普通微积分的链式法则相比，式（3－25）多了一项。为给出直观解释，并简单起见，我们假设漂移率 $a(x,t)=0$，且 $\frac{\partial F}{\partial t}=0$，则 $E(dx)=0$，但 $E(dF)\neq 0$。这正是詹森（Jensen）不等式的含义。若 F 为 x 的凸函数（即 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}>0$），则 $E(dF)>0$。若 F 为 x 的凹函数（即 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}<0$），则 $E(dF)<0$。对伊藤过程，dx 可看做 $\sqrt{dt}$，而 $(dx)^2$ 可看做 dt，因此，凸性或凹性的作用体现在 dt 的阶上，所以在 F 的微分中这些项不能被忽略。式（3－25）

81 中多出来的那一项正好反映了这一结果。

我们可以很容易地将上述泰勒级数展开式推广到几个伊藤过程的函数

上海享水股票论坛 bbs.macrogu.com

中。例如，设 $F=F(x_1, x_2, \cdots, x_m, t)$ 是关于时间 t 和 m 个伊藤过程 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的函数，其中

$$dx_i = a_i(x_1,\cdots,x_m,t)dt + b_i(x_1,\cdots x_m,t)dz_i \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag{3-26}$$

并且 $E(dz_i dz_j)=\rho_{ij}dt$。伊藤引理给出的全微分 dF 可写为

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}dx_i + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j \tag{3-27}$$

将式（3－26）代入式（3－27），我们可将 dF 展开为

$$\begin{aligned} dF = &\left[\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i a_i(x_1,\cdots,t)\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_i b_i^2(x_1,\cdots,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\rho_{ij}b_i(x_1,\cdots,t)b_j(x_1,\cdots,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right]dt \\ &+ \sum_i b_i(x_1,\cdots,t)\frac{\partial F}{\partial x_i}dz_i \end{aligned} \tag{3-28}$$

例 3.1　几何布朗运动。我们回到式（3－12）中的几何布朗运动。我们将利用伊藤引理来证明 $F(x)=\log x$ 所服从的过程实际上由式（3－13）给出。由于$\frac{\partial F}{\partial t}=0$，$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{x}$及$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{1}{x^2}$，由式（3－24）有

$$\begin{aligned} dF &= \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2x^2}(dx)^2 = \alpha dt + \sigma dz - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dz \end{aligned} \tag{3-29}$$

因此，在任一有限时间区间 T 上，$\log x$ 的变化服从均值为 $\left(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T$、方差为 $\sigma^2 T$ 的正态分布。

为什么 $F(x)=\log x$ 的漂移率小于 α？这是因为 $\log x$ 为 x 的凹函数，而 x 是不确定的。（由詹森不等式知）$E(\log x)\leqslant\log(Ex)$。时间期限 T 越长，x 的不确定性就越大，因此，$\log x$ 的期望值要比 x 的期望值的对数变化小（这正好是詹森不等式的结果），故 $\log x$ 的漂移率小于 α。

例 3.2　相关的布朗运动。作为第二个例子，考虑函数 $F(x,y)=xy$， 82
其中 x 和 y 均为几何布朗运动：

$$dx = \alpha_x x dt + \sigma_x x dz_x$$
$$dy = \alpha_y y dt + \sigma_y y dz_y$$

且 $E(dz_x dz_y)=\rho dt$。我们来寻找 $F(x,y)$和 $G=\log F$ 所服从的方程。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

因$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0$，且$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=1$，由式（3－27）可得

$$dF=xdy+ydx+dxdy \tag{3-30}$$

将 dx 和 dy 带入式（3－30），整理得

$$dF=(\alpha_x+\alpha_y+\rho\sigma_x\sigma_y)Fdt+(\sigma_x dz_x+\sigma_y dz_y)F \tag{3-31}$$

因此，F 仍然服从几何布朗运动。$G=\log F$ 服从什么运动过程呢？进行与前面例子相同的步骤，可得

$$dG=\left(\alpha_x+\alpha_y-\frac{1}{2}\sigma_x^2-\frac{1}{2}\sigma_y^2\right)dt+\sigma_x dz_x+\sigma_y dz_y \tag{3-32}$$

由式（3－32）可知，在任意时间区间 T 上，$\log F$ 的变化服从均值为 $\left(\alpha_x+\alpha_y-\frac{1}{2}\sigma_x^2-\frac{1}{2}\sigma_y^2\right)T$、方差为$(\sigma_x^2+\sigma_y^2+2\rho\sigma_x\sigma_y)T$ 的正态分布。

例 3.3 贴现值。假设 $F(x)=x^\theta$，其中 x 服从式（3－12）的几何布朗运动。我们将说明如何计算期望的贴现值：

$$E\left[\int_0^\infty F(x(t))e^{-rt}dt\right]$$

由伊藤引理，dF 可写为

$$\begin{aligned} dF &= \theta x^{\theta-1}(\alpha x dt+\sigma x dz)+\frac{1}{2}\theta(\theta-1)x^{\theta-2}\sigma^2x^2dt \\ &= \left[\theta\alpha+\frac{1}{2}\theta(\theta-1)\sigma^2\right]Fdt+\theta\sigma F dz \end{aligned} \tag{3-33}$$

由式（3－33）可以看出 F 服从几何布朗运动。因此，我们可利用关于几何布朗运动的期望公式（3－14），记作

$$E[F(x,t)]=F(x_0)\exp\left[\left(\theta\alpha+\frac{1}{2}\theta(\theta-1)\sigma^2\right)t\right] \tag{3-34}$$

故贴现值为

$$\begin{aligned} &E\left[\int_0^\infty F(x(t))e^{-rt}dt\right] \\ &=\int_0^\infty F(x_0)\exp\left[\left(\theta\alpha-r+\frac{1}{2}\theta(\theta-1)\sigma^2\right)t\right]dt \end{aligned}$$

计算得

$$\frac{x_0^\theta}{r-\theta\alpha-\frac{1}{2}\theta(\theta-1)\sigma^2}$$

式中，假定分母大于零。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

3.5 反射壁和长期分布

83

假设 x 服从简单布朗运动式（3-6），其初始点为 x_0。在时间 t，x_t 服从均值为（$x_0+\alpha t$）、方差为 $\sigma^2 t$ 的正态分布。我们限定过程 x 不能超过上反射壁 $\bar{x}$。如果采用布朗运动的随机游动表示，这表示从 $x-\Delta h$ 出发，若 x 要做一个向上的跳跃，则反射回 $\bar{x}-\Delta h$（而 x 做向下的跳跃到 $\bar{x}-2\Delta h$ 是可以的）。类似地，我们也可在 $\underline{x}$ 处放一个下反射壁。

在经济学应用中，由于市场中的均衡机制，往往会存在这样的反射壁。例如，若 x 表示商品价格，它就是新公司进入时的上反射壁，也是现有公司退出时的下反射壁。在第8章和第9章中我们将遇到这些模型。

这里，我们要讨论当 x 服从此种过程且很长一段时间之后会发生什么。根据马尔可夫性，在遇到反射壁之后，初始值 x_0 的影响将会消失。当过程在两个反射壁之间来回运动很长时间之后，我们预期它将成为一个长期平稳的过程。我们希望能找到该分布的概率密度，记作 $\phi(x)$。

我们再次利用布朗运动的随机运动表达式。考虑任意3个相邻的点 $x-\Delta h$，x 和 $x+\Delta h$。在任意一个充分小的时间区间 Δt 上，概率集 $\phi(x-\Delta h)$以概率 p 增大，而概率集 $\phi(x+\Delta h)$以概率 q 下降，其中 p，q 由式(3-10)给出。这些移动构成了 x 在该区间外的概率集。如果概率分布是平稳的，这一定就是 $\phi(x)$。因此

$$\phi(x)=p\phi(x-\Delta h)+q\phi(x+\Delta h) \tag{3-35}$$

现在我们将 p 和 q 代入，利用泰勒定理展开等式右边，并合并同类项，有

$$\begin{aligned}\phi(x)&=\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{\alpha}{\sigma^2}\right)\Delta h\right]\left[\phi(x)-\Delta h\phi'(x)+\frac{1}{2}(\Delta h)^2\phi''(x)+\cdots\right]\\&\quad+\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{\alpha}{\sigma^2}\right)\Delta h\right]\left[\phi(x)+\Delta h\phi'(x)+\frac{1}{2}(\Delta h)^2\phi''(x)+\cdots\right]\\&=\phi(x)-\left(\frac{\alpha}{\sigma^2}\right)(\Delta h)^2\phi'(x)+\frac{1}{2}(\Delta h)^2\phi''(x)+\cdots\end{aligned}$$

被忽略的项都比$(\Delta h)^2$（或 Δt）更快地趋近于零。因此，我们从等式两边将 $\phi(x)$消去，再除以$(\Delta h)^2$，并采用 $\Delta h\to 0$ 时的极限形式。这给出了微分方程： 84

$$\phi''(x)=\gamma\phi'(x) \tag{3-36}$$

式中，$\gamma=\frac{2\alpha}{\sigma^2}$。

容易看出该方程的通解为

$$\phi(x) = Ae^{\gamma x} + B$$

式中，A，B 为待定常数。为确定 A，B，我们必须考虑在两个反射壁 x 和 $\bar{x}$ 上所发生的情形。先考虑上反射壁。概率集合 $\phi(\bar{x}-\Delta h)$ 以概率 p 向上移动，然后正好反射回 $\bar{x}-\Delta h$。因此，平衡这些概率集合的方程被修正为

$$\phi(\bar{x}-\Delta h) = p\phi(\bar{x}-\Delta h) - p\phi(\bar{x}-2\Delta h)$$

展开上式并像以前那样简化，我们发现

$$\phi'(\bar{x}) = \gamma\phi(\bar{x})$$

将通解代入上式，我们发现 $B=0$。下反射壁 $\underline{x}$ 也能得到相同的结论。

最后，选出的常数 A 必须能确保在 $\bar{x}$ 与 $\underline{x}$ 之间全部概率集合的总和等于 1，有

$$\phi(x) = \frac{\gamma\exp(\gamma x)}{\exp(\gamma \bar{x}) - \exp(\gamma \underline{x})} \tag{3-37}$$

因此，长期平稳概率密度就是这样一种简单的指数。很自然，如果 x 过程有正的漂移率（$\alpha>0$ 从而 $\gamma>0$），该指数就应该朝上反射壁提高；而如果它有负的漂移率，该密度会朝其右边下降。如果 $\gamma>0$，事实上，我们可以令下反射壁 $\underline{x}\to-\infty$，并考虑一个仅有上反射壁 $\bar{x}$ 的过程；它将有一个长期平稳分布，其中密度依指数下降到 $\bar{x}$ 的左边。类似地，如果 $\gamma<0$，我们可以让上反射壁 $\bar{x}\to\infty$。

在第 8 章和第 9 章，我们将有机会用到这些分布。其中有两种推广的情形。在其中一种情形下，我们将推广考虑“突然死亡”跳跃过程的观点。更进一步的推广包括另外一种情形，即 x 服从一般的伊藤过程，并考察 x 的概率分布的实际动态变化而不仅仅是其长期平稳状态。这两种推广都需要有关概率密度的微分方程（柯尔莫哥洛夫方程）的阐述，我们在本章附录中介绍推导过程。

85 3.6 跳跃过程

我们前面介绍的都是扩散过程，即处处连续的随机过程。但更现实的是，将经济变量看做不频繁却离散跳跃的过程来建立模型。一个例子是，当新竞争者进入一个企业很少的市场时，价格往往会突然下降。类似地，为了对开发类似专利的竞争者的成功作出反应，我们可以把专利的价格模型化为有不可预测的但有相当大的下降的情况。或者，我们可将石油价格看成布朗

运动和跳跃过程的混合；在正常时期，石油价格波动是连续的，但在战争或革命开始或结束时，油价也会发生较大的下降或上升。在本节，我们将讨论泊松跳跃过程（Poission process），并介绍伊藤引理的一种形式，它有助于我们对泊松过程的处理。

泊松过程是具有固定或随机跃度的跳跃过程，其中跳跃发生的时间服从泊松分布。我们称这些跳跃为“事件”。记 λ 为事件的平均发生率，在无穷小的时间区间 $\mathrm{d}t$ 上，事件发生的概率为 $\lambda\mathrm{d}t$，而事件不发生的概率为 $1-\lambda\mathrm{d}t$。事件是跃度为 u 的跳跃，u 自身是一随机变量。

与维纳过程类似，记 q 为一泊松过程，即

$$\mathrm{d}q=\begin{cases}0, & \text{概率为 } 1-\lambda\mathrm{d}t\\ u, & \text{概率为 } \lambda\mathrm{d}t\end{cases}$$

对应于式（3－11）中的伊藤过程，我们将变量 x 的随机过程记为如下的泊松微分方程：

$$\mathrm{d}x=f(x,t)\mathrm{d}t+g(x,t)\mathrm{d}q \tag{3-38}$$

式中，$f(x,t)$，$g(x,t)$为（非随机的）已知函数。

假设 $H(x,t)$ 为 x 和 t 的某一可微函数，我们导出 H 的预期变化 $E(\mathrm{d}H)$的表达式。首先，将 $\mathrm{d}H$ 展开成如下形式：

$$\mathrm{d}H=\frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial H}{\partial x}\mathrm{d}x=\frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial H}{\partial x}[f(x,t)\mathrm{d}t+g(x,t)\mathrm{d}q] \tag{3-39}$$

（注意，与伊藤过程不同，$\mathrm{d}x$ 并不依赖于 $\sqrt{\mathrm{d}t}$，因而高阶项趋于零的速度比 $\mathrm{d}t$ 快。）这样 x 的变化通过两种方式引起 H 的改变：（1）$H(x,t)$连续且确定地变动以对 x 的漂移作出反应；（2）存在泊松事件发生的可能性。若泊 86
松事件发生，x 将有一个大小为 $ug(x,t)$的随机改变，而 $H(x,t)$也将有相应改变。因泊松事件在区间 $\mathrm{d}t$ 上发生的概率为 $\lambda\mathrm{d}t$，我们有

$$E\left[\frac{\partial H}{\partial x}g(x,t)\mathrm{d}q\right]=E_u\{\lambda[H(x+ug(x,t),t)-H(x,t)]\}\mathrm{d}t \tag{3-40}$$

式中，等号右边的期望是针对跳跃的跃度 u 来求的。因此，H 的微分的期望可写成

$$E[\mathrm{d}H]=\left[\frac{\partial H}{\partial t}+f(x,t)\frac{\partial H}{\partial x}\right]\mathrm{d}t + E_u\{\lambda[H(x+g(x,t)u,t)-H(x,t)]\}\mathrm{d}t \tag{3-41}$$

上海若水股票论坛 bbs.miaogu.com

当处理连续过程时，我们也可以像伊藤引理那样使用式（3－41）。

有时我们会遇到伊藤过程和跳跃过程的混合，前者在所有时间内都起作用，而后者不频繁地发生。伊藤引理的适当形式也综合了这两种效果。因此，若

$$dx=a(x,t)dt+b(x,t)dz+g(x,t)dq$$

则函数 $H(x, t)$ 的变化的期望为

$$E[dH]=\left[\frac{\partial H}{\partial t}+a(x,t)\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{1}{2}b^2(x,t)\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right]dt \\ +E_u\{\lambda[H(x+g(x,t)u,t)-H(x,t)]\}dt \qquad (3-42)$$

注意到二阶导数项仅仅与过程中连续部分所引起的方差有关；而跳跃部分的贡献在于右边的最后一项，涉及 H 在不同的离散点间的差。

例 3.4 工资的贴现。假设有一个永远生存的个体，他的工资在随机时刻有一个大小为 ϵ 的固定的增长。若 λ 为增长的平均发生率，则该个体的工资可用微分方程写为

$$dW=\epsilon dq \qquad (3-43)$$

式中，u 以概率 1 等于 1。该个体的预期收入流的现值为多少呢？

87 我们希望找到

$$V(W)=E\int_0^\infty W(t)e^{-\rho t}dt$$

我们可将 V 看成一项资产，并且令该资产的正常回报率 ρ 等于分红（当前工资）和预期资本收益之和：

$$\rho V dt=W(t)dt+E(dV)$$

在这种情形下：

$$E(dV)=\left(\frac{dV}{dW}\right)\lambda\epsilon dt=\left(\frac{\lambda\epsilon}{\rho}\right)dt$$

因此，有

$$V(W)=\frac{W}{\rho}+\frac{\lambda\epsilon}{\rho^2}$$

因此，V 等价于支付一笔永续年金，即当前工资 W 加上每单位时间平均增加的市场价值（如利息等）。

例 3.5 机器的价值。假设有一台机器在运转期间产生常数利润流 π；机器不需要维持，但在某一时刻它将损坏且不得不丢弃。若 λ 为损坏发生率，ρ 为贴现率，该机器的价值为多少？

该机器的价值服从过程

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

$$dV = -Vdq$$

式中，“事件”指 u 以概率 1 等于 1。故资产回报方程为

$$\rho V dt = \pi dt + E(dV) = \pi dt - \lambda V dt$$

这样

$$V = \frac{\pi}{\rho + \lambda}$$

因而我们可以将机器运转带来的利润流看成永续年金，并通过贴现率和 λ 来对它进行估价。这是一个非常一般的想法：当泊松事件以发生率 λ 发生时，利润流将会停止；我们可以当做利润流从未停止来计算该利润流的期望现值，但应把 λ 加到贴现率中。在后面的章节中我们将遇到这个例子的许多应用。

3.7 文献导引

在本章中，我们对随机过程和伊藤引理的处理是介绍性和启发式的。对随机过程及其性质的更深入讨论可见考克斯和米勒（Cox and Miller, 88
1965）、费勒（Feller, 1971）和卡林和泰勒（Karlin and Taylor, 1975, 1981）的论述。考克斯和米勒（Cox and Miller, 1965）以及卡林和泰勒（Karlin and Taylor, 1981）提供了对柯尔莫哥洛夫方程的一个非常好的处理。关于连续过程和跳跃过程在建立经济和金融模型中的使用的讨论，参见默顿（Merton, 1990, Chap.3）的论述。关于随机过程更严格的方法见卡拉扎斯和施里夫（Karatzas and Shreve, 1988）的论述。

对伊藤引理及其应用的一些更详细但仍是介绍性的讨论，可参见默顿（Merton, 1971）、乔（Chow, 1979）、马利亚里斯和布洛克（Malliaris and Brock, 1982）及霍尔（Hull, 1989）的论述。（默顿（Merton, 1971）也提供了对泊松过程的一种很好的讨论和一些例子。）更严格的处理参见库什纳（Kushner, 1967）、阿诺德（Arnold, 1974）、多珊（Dothan, 1990）及哈里森（Harrison, 1985, Chap. 4）的论述。另外，对期望现值更详细的讨论可见迪克西特（Dixit, 1993a）的论述。

bbs.macd.com 股票论坛

附录

柯尔莫哥洛夫方程

有时，我们需要回答下述问题：若 $x(t)$ 服从特定的随机过程，其初始值为 x_0，在经过一定时间 t 后，$x(t)$ 落在某一范围内的概率为多大？或 $x(t)$ 在时间 $t \leqslant T$ 内到达点 x_1 的概率为多少？为回答这样一些问题，我们需要描述 $x(t)$ 的概率密度及其随时间的演变情况。利用柯尔莫哥洛夫方程我们可以解决这一问题。

利用本章第 2.2 节中引入的离散时间随机游动表达式，我们可以推导出式（3－6）中带漂移的简单布朗运动的柯尔莫哥洛夫方程。回忆以前的做法，我们将长度为 t 的时间区间分为 $n=\frac{t}{\Delta t}$ 个离散步骤，在每一步中，x 以概率 p 增加 Δh，或以概率 $q=1-p$ 减少 Δh。最后，为保证（x_t-x_0）的方差独立于 Δt 的特定选择，我们令 $\Delta h=\sigma\sqrt{\Delta t}$。

令 $\phi(x_0,t_0;x,t)$ 表示 $x(t)$ 的概率密度函数，给定较早时间 t_0，有 $x(t_0)=x_0$，这样：

$$\text{Prob}[a \leqslant x(t) \leqslant b \mid x(t_0)=x_0]=\int_a^b \phi(x_0,t_0;u,t)\mathrm{d}u$$

在时间区间 $[t-\Delta t,t]$ 上，过程 $x(t)$ 到达点 x 有两种方式：一是从 $x-\Delta h$ 增
89 加到 x；二是从 $x+\Delta h$ 减少到 x。故我们有

$$\begin{aligned}\phi(x_0,t_0;x,t)=&p\phi(x_0,t_0;x-\Delta h,t-\Delta h)\\&+q\phi(x_0,t_0;x+\Delta h,t-\Delta h)\end{aligned}\qquad(3-44)$$

在前面的讨论中，我们将这看成是平稳状态的动态推广（见式（3－35））。

现在将 $\phi(x_0,t_0;x-\Delta h,t-\Delta h)$ 在 $\phi(x_0,t_0;x,t)$ 展开成泰勒级数：

$$\begin{aligned}&\phi(x_0,t_0;x-\Delta h,t-\Delta h)\\&=\phi(x_0,t_0;x,t)-\Delta t\frac{\partial\phi}{\partial t}-\Delta h\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{1}{2}(\Delta h)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\cdots\end{aligned}$$

注意到三阶项及更高阶项都含 $(\Delta t)^{\frac{3}{2}}$，$(\Delta t)^2$ 等，故它们比 Δt 更快地趋于零。对 $\phi(x_0,t_0;x+\Delta h,t-\Delta h)$ 也做同样的展开，并将它们代入式(3－44)，得

$$\begin{aligned}\phi(x_0,t_0;x,t)=&(p+q)\phi(x_0,t_0;x,t)-(p+q)\Delta t\frac{\partial\phi}{\partial t}\\&-(p-q)\Delta h\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{1}{2}(p+q)(\Delta h)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\end{aligned}$$

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

最后，我们利用 $p+q=1$，由式(3-10)知 $p-q=\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)\sqrt{\Delta t}$，又有 $\Delta h=\sigma\sqrt{\Delta t}$，将它们代入以上方程，依据 Δt 的幂排列并重新整理，得

$$\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x_0,t_0;x,t)-\alpha\frac{\partial}{\partial x}\phi(x_0,t_0;x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\phi(x_0,t_0;x,t) \tag{3-45}$$

式（3-45）为带漂移布朗运动的柯尔莫哥洛夫向前方程，它描述了概率密度 $\phi(x_0,t_0;x,t)$ 随时间的演变情形。用同样的方法我们可得到式(3-11)中一般伊藤过程的柯尔莫哥洛夫向前方程：[12]

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b^2(x,t)\phi(x_0,t_0;x,t)]-\frac{\partial}{\partial x}[a(x,t)\phi(x_0,t_0;x,t)]$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\phi(x_0,t_0;x,t) \tag{3-46}$$

式（3-45）和式（3-46）称为向前方程，因为它们把时间 t_0 的初始值 x_0 作为边界条件，然后求解 x 未来值的密度函数。类似地，可以描述时间后退时密度函数的演化，即将时间 t 时的 $x(t)$ 作为边界条件，求 x_0 在 $t_0<t$ 时的密度函数。伊藤过程的柯尔莫哥洛夫向后方程为 90

$$\frac{1}{2}b^2(x_0,t_0)\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\phi(x_0,t_0;x,t)+a(x_0,t_0)\frac{\partial}{\partial x_0}\phi(x_0,t_0;x,t)$$
$$=-\frac{\partial}{\partial t_0}\phi(x_0,t_0;x,t) \tag{3-47}$$

在本书后面我们将用到柯尔莫哥洛夫方程，这里先考虑两个例子是有用的。

例3.6 O-U过程。在这个例子中，我们回到式（3-16）的简单O-U过程（均值回归过程）。为简单起见，设 $\bar{x}=0$，则方程变为

$$dx=-\eta x\,dt+\sigma dz \tag{3-48}$$

下面我们证明式（3-17）和式（3-18）给出了 $x(t)$ 的均值和方差。我们可以利用柯尔莫哥洛夫向前方程来证明这个命题。

$x(t)$ 的矩母函数（moment-generating function）为

$$M(\theta,t)\equiv E(e^{-\theta x})=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x_0,t_0;x,t)e^{-\theta x}dx \tag{3-49}$$

则

$$\frac{\partial M}{\partial t}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial t}e^{-\theta x}dx \tag{3-50}$$

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

O-U 过程的柯尔莫哥洛夫向前方程为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}=\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}-\eta x\frac{\partial \phi}{\partial x}+\eta\phi \tag{3-51}$$

将$\frac{\partial \phi}{\partial t}$代入式（3-50），积分后得到下述关于 $M(\theta,t)$ 的方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 M-\eta\theta\frac{\partial M}{\partial \theta}=\frac{\partial M}{\partial t} \tag{3-52}$$

91 这个偏微分方程必须根据边界条件来求解：

$$M(0,t)=1,\ -M_\theta(0,0)=x_0,\text{且 } \mathrm{Var}(x(0))=M_{\theta\theta}(0,0)-x_0^2=0$$

读者可自行证明该方程的解为

$$M(\theta,t)=\mathrm{e}^{\sigma^2\theta^2/4\eta}\left[1-x_0\theta\mathrm{e}^{-\eta t}+\left(\frac{1}{2}x_0^2-\frac{\sigma^2}{4\eta}\right)\theta^2\mathrm{e}^{-2\eta t}\right] \tag{3-53}$$

利用 $E(x_t)=-M_\theta(0,t)$ 和 $E(x_t^2)=M_{\theta\theta}(0,t)$，读者可证明式（3-17）和式（3-18）。

例 3.7 可更新资源的稳定状态分布。柯尔莫哥洛夫方程为偏微分方程，一般情况下难以求解。然而，我们通常对随机变量长期稳定状态的特征感兴趣。并不是所有的随机过程都有能收敛到某些稳定状态函数（例如，几何布朗运动没有稳定状态函数，而 O-U 过程则具有稳定状态函数）的概率分布。但是，若稳定状态分布存在，在大多数情况下它能够通过柯尔莫哥洛夫向前方程找到，这时的柯尔莫哥洛夫方程退化为常微分方程。

作为一个简单的练习，我们首先直接从式（3-45）中重新推导出反射壁之间长期平稳的布朗运动的负指数分布。该分布独立于初始状态 x_0、t_0 以及当前时间 t，因此，我们得到函数 $\phi(x)$的一个常微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2\phi''(x)-\alpha\phi'(x)=0$$

这与前面讨论过的式（3-36）相同，其求解过程也与前面一样。

现在考虑一个更复杂的随机过程，它通常用来描述可更新资源存量 $x(t)$在依赖于 x 的一定开发速度 $q(x)$下的演化：

$$\mathrm{d}x=[f(x)-q(x)]\mathrm{d}t+\sigma(x)\mathrm{d}z \tag{3-54}$$

式中，$f(x)$为资源的增长函数，它是一个凹函数且满足：

$$f(x_{\min})=f(x_{\max})=0,\text{且对 } x_{\min}<x<x_{\max},\text{有 } f(x)>0$$

关于可更新资源的许多文献讨论了式（3-54）的确定性形态，将社会最优 $q(x)$与来自竞争性市场的结论进行比较。然而，生物学家和人口生态

92 学家早已认识到，大多数的可更新资源存量的演变是随机的，并且式(3-54)

是一个自然的表示。[13]尽管 $x(t)$是随机波动的，研究 x 在达到稳定状态均衡时的概率密度正是我们所关注的。

在达到稳定状态均衡时，向前方程式（3-46）中的 ϕ 将不依赖于 x_0，t_0 或 t。记此平稳概率密度函数为 $\phi(x)$，(在求一次积分后）方程可改写为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sigma^2(x)\phi_\infty(x)]=[f(x)-q(x)]\phi_\infty(x)$$

这可以重写为

$$\frac{\mathrm{d}[\sigma^2(x)\phi_\infty(x)]}{\sigma^2(x)\phi_\infty(x)}=\frac{2}{\sigma^2(x)}[f(x)-q(x)]\mathrm{d}x \tag{3-55}$$

两边积分后可得到稳定状态密度的下述方程：[14]

$$\phi_\infty(x)=\frac{m}{\sigma^2(x)}\exp\left[2\int^x\frac{f(v)-q(v)}{\sigma^2(v)}\mathrm{d}v\right] \tag{3-56}$$

式中，m 为一个使 $\int_0^\infty\phi_\infty(x)\mathrm{d}x=1$ 的积分常数。

作为一个例子，假定 $f(x)$为逻辑斯蒂函数（Logistic function），即

$$f(x)=\alpha x\left(1-\frac{x}{K}\right)$$

式中，K 为资源存量的可开采容量。此外，假设资源不开采，即 $q(x)=0$，而且 $\sigma(x)=\sigma x$。那么，($\sigma^2<2\alpha$ 时)由式（3-56）可使得以下稳定状态密度函数成立：

$$\phi_\infty(x)=\left(\frac{2\alpha}{\sigma^2K}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}-1}\frac{x^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}-2}e^{\frac{-2\alpha x}{\sigma^2K}}}{\Gamma\left(\frac{2\alpha}{\sigma^2}-1\right)} \tag{3-57}$$

式中，$\Gamma(\cdot)$表示伽玛函数（gamma function)。由此方程我们可以确定 x 在达到稳定状态均衡时的期望值为

$$E(x_\infty)=K\left(1-\frac{\sigma^2}{2\alpha}\right) \tag{3-58}$$

注意，随机波动降低了 x 在稳定状态时的期望值，并且当 $\sigma^2\to\alpha$ 时，$E(x_\infty)\to0$；此外，若 $\sigma^2\geqslant\alpha$，随机波动将会使资源存量耗尽，即 ϕ_∞成为退化测度且 $x(t)$以概率 1 收敛到 0(对这一点及可更新资源相关模型的更详细的讨论，以及最优随机开发规则 $q^*(x)$的推导可见平迪克(Pindyck,1984)的论述)。

【本章注释】

[1] 人们可能会说随机性只是气象学的局限性的一种反映。一般来讲，

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

如果我们可以构建充分完备和精确的气象模型，这种随机性就可以忽略。但是从操作的观点来看，也许下周气温确实是一个随机变量。

[2] 在本书中，我们并不想详细且严格地证明随机过程，实际上仅提供了能满足我们应用的最简单的解释和认识。关于随机过程的详细的一般证明，参见考克斯和米勒（Cox and Miller，1965），费勒（Feller，1971）及卡林和泰勒（Karlin and Taylor，1975）的论述。

[3] 这里忽略了在相当长的时间内全球气温会变暖或者变冷的可能。

[4] 1827 年，植物学家罗伯特·布朗（Robert Brown）首先观察到并描述了悬浮在液体中的微粒的运动，这是由相邻粒子间明显的连续随机影响所产生的；因此，就有了布朗运动这一术语。1905 年，阿尔伯特·爱因斯坦（Albert Einstein）提出了布朗运动的数学理论，诺伯特·维纳（Norbert Wiener）1923 年进一步发展了爱因斯坦的理论并使之更严格。

[5] 通常我们采用自然对数，即对数的底总是 e。

[6] 若 X，Y 为两个随机变量，它们之间的相关系数定义为 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,\ Y)}{(\sigma_X\sigma_Y)}$。在这里 $\sigma_X=\sigma_Y=1$。

[7] 考克斯和米勒（Cox and Miller，1965）详细讨论了这种方法。我们这里的说明采用迪克西特（Dixit，1993a）的论述。

[8] 关于对数正态分布的详细讨论可参见艾奇逊和布朗（Aitchison and Brown，1957）的论述。

[9] 单位根检验最初由迪基和富勒（Dicky and Fuller，1981）提出，现在已有了进一步的推广。对这些检验的介绍，参见平迪克和鲁宾菲尔德（Pindyck and Rubinfeld，1991，Chap.15）的论述。

[10] 1870—1973 年的数据来源于曼塞（Manthy，1978）；1973 年后的数据来源于美国能源信息和矿业局。价格按批发价格指数（现在为生产价格指数）进行了调整。

[11] 当潜在的随机变量被模型化为均值回归的过程时，通常不可能获得最优投资规则的解析解，因此我们必须利用数值解技巧。反对将原油及其他可耗竭资源的价格模型化为几何布朗运动的强有力的证据，可参见伦德（Lund，1991b）的论述。

[12] 关于柯尔莫哥洛夫向前与向后方程的推导及更详细的讨论参见卡林和泰勒（Karlin and Taylor，1981）的论述。

[13] 见伯丁顿和梅（Beddington and May，1977）以及戈尔和里克特-戴恩（Goel and Richter-Dyn，1974）的论述。对可更新资源经济学在确定性框架下的讨论见克拉克（Clark，1976）的论述。

[14] 默顿（Merton，1975）也提供了这个方程的一种推导，并指出了它如何用于随机演化人口的新古典主义增长模型。

上善若水股票论坛
bbs.miaogu.com

第4章 不确定条件下的动态最优化

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

时间在投资决策中起着非常重要的作用。企业今天的投资支出将产生一个未来的收入流，该收入流除了受企业及其竞争者后来所做的其他决策影响外，还受到不确定性的影响。在做当前决策时，企业必须能预见所有这些可能的发展。正如我们在第2章所强调的，这种未来从一方面来说就是在以后做同样决策的机会，因此，延期的权利应包括在今天的选择菜单中。我们用以建立投资决策模型的数学知识，必须能够解决所有这些考虑。

本章将介绍这样两种知识：动态规划（dynamic programming）及或有债权分析（contigent analysis）。这两种知识实际上是紧密相关的，在许多应用中它们往往导出相同的结

果。然而，它们对金融市场和企业用于评价未来现金流的贴现率所提出的假设是不同的。

动态规划是研究动态优化问题的一种常用的工具，而且在处理不确定性问题时也非常有用。它将整个决策过程分为两个部分：即期决策和评价函数。评价函数从来自即期决策的条件出发评价所有后续决策的结果。如果规划的期限是有限的，在期限末端所作出的最后一个决策将没有后续决策，因此可采用标准的静态优化方法来处理，所得到的解就是倒数第二个决策的评价函数。这个评价函数也可以作为从后往前的两阶段的决策，依次类推。因 94
此，我们可倒推到最初的条件。这一系列计算过程看起来很复杂，但计算机软硬件的进步使得这种方法非常可行。本书中，我们对许多问题是采用这种方法获得解的。若规划的期限是无穷的，看起来更加困难的计算可以采用其递归特征来简化，即每一项决策所产生的另一个问题就像是初始问题。这不仅使数值计算变得简单，而且还有可能得到解的一些理论特征，有时我们还有可能获得解析解。

或有债权分析建立在金融经济学的基础上。首先注意投资计划由随时间而变化并取决于未说明的不确定事件的成本与收益流来限定的。拥有某一投资机会或从某一已完成的项目中获得经营利润流的权利的企业或个人就拥有了一种有价值的资产（asset）。现代经济是拥有全部资产种类的一种非常丰富的菜单的市场。如果我们的投资项目或投资机会碰巧是这些可交易资产中的一种，它会有一个已知的市场价格。即使它并不能直接交易，人们仍然可以通过将它与其他可交易的资产联系起来从而算出它的一个隐含价值。

我们所需要的只是能最终在未来每一期以及未来每种不确定条件下确切地复制出来自投资项目的回报模式的可交易资产的某些组合或投资组合。（这种投资组合的成分不必是固定不变的，它可以随着资产成分的价格的变化而变化）。那么，投资项目的价值必须等于该投资组合的总价值，因为任何差异都会提供一种套利的机会：通过购买两种资产或资产组合中价格较低的并出售其中价格较高的而得到确定的收益。隐含于这种计算中的要求是企业应当以最有效的方式利用其投资机会，因为如果它不这样做，套利者可以购买该投资机会并获得正利润。一旦我们知道该投资机会的价值，我们就能找到获得该价值的最优投资形式、投资规模和投资时机，因此得出最优的投资决策。

在第 4.1 节，我们说明了动态规划的基本思想。考虑到连续性，我们从

第2章的两阶段例子开始，然后将它推广到更长的时间跨度，包括离散时间段和连续时间段。其中，我们考虑了在第3章中所引入的两种特殊不确定性形式，即伊藤过程和泊松过程。第4.2节阐述了未来不确定回报的或有债权
95 的一般观点，以及通过套利对其价格的确定，这里的焦点仍然是伊藤过程和泊松过程。第4.3节解释了这两种方法之间的联系还说明了在不同风险程度下获得贴现回报与定价回报的简单方法之间的联系。

贯穿全书，我们强调方法背后的直觉而不是正式证明。本章附录给出了技术细节的一个概述。

4.1 动态规划

在这一节，我们将介绍动态规划的基本思想。我们从第2章提出的两阶段例子开始，从而提供了动态规划观点的简单离散假定并继续我们以前的分析。然后，我们把它推广到多阶段决策的一般理论。最后，我们讨论连续时间情形，并用伊藤过程和泊松过程来表示背后的不确定性。这正是后面章节会出现的大多数应用的假定。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

4.1.1 两阶段的例子

第2章中一个推广了的例子引入了投资决策的最优时机和期权价值的观念。我们首先比较即时投资和等待的现值。实际上，动态规划是对更一般的动态决策作出这种比较的一种系统方法。为说明这一点，我们继续推广我们的例子。

作为第一步，在本节中我们将以更一般的方式重新讨论第2章提出的两阶段问题。以前，对例子中的大多数参数我们选择一些特定的数值；现在，我们假设这些参数可以取任意值。记 I 为投资子工厂的沉没成本，该工厂在每个阶段永远生产一个虚拟产品，令 r 表示利率。假设在阶段0虚拟产品的价格为 P_0；从阶段1开始，产品价格为 $(1+u)P_0$ 的概率为 q，为 $(1-d)P_0$ 的概率为 $(1-q)$。

先假设投资机会仅在阶段0存在；若企业在阶段0决定不投资，在阶段1它将不能改变决定。记 V_0 为企业从其投资中所取得收入的期望现值。根
96 据虚拟产品两种可能价格的相应概率加权平均并贴现，我们有

$$V_0 = P_0 + [q(1+u)P_0 + (1-q)(1-d)P_0]\left[\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \cdots\right]$$

$$= P_0 + [1 + q(u+d) - d]P_0 \frac{\frac{1}{1+r}}{1 - \frac{1}{1+r}}$$

$$= \frac{P_0[1 + r + q(u+d) - d]}{r}$$

（注意：为了使上面的求和级数收敛，我们需要 $r>0$。）若 $V_0>I$，则企业选择投资，所获投资收益为 V_0-I；若 $V_0<I$，则不进行投资，所获投资收益为零；若 $V_0=I$，则企业对投资与否无所谓，收益均为零。令 Ω_0 为企业在该项目上的净回报，若企业必须在阶段 0 以"勿失良机"（now-or-never）为基础决定是否投资，根据上面的分析，我们有

$$\Omega_0 = \max[V_0 - I, 0] \tag{4-1}$$

现在考虑现实的情形，未来任何阶段投资机会都仍然存在。这时，在阶段 0 的决策涉及不同的权衡：现在投资，或者等到阶段 1 再决定最佳选择。为评价这一点，企业必须预测自己的决策在未来不同条件下的结果。从阶段 1 向前，条件不会发生任何变化，因而任何有利的投资项目将不会推迟到阶段 1 之后才发生，那么我们只需预测到阶段 1 为止就行了。

假设企业在阶段 1 没有进行投资，而是在等待。在阶段 1，价格将变成：

$$P_1 = \begin{cases} (1+u)P_0, & \text{概率为 } q \\ (1-d)P_0, & \text{概率为}(1-q) \end{cases}$$

并且在以后的阶段 2，3，… 中，价格将保持在这一水平。该收人流在阶段 1 的贴现值为

$$V_1 = P_1 + \frac{P_1}{(1+r)} + \frac{P_1}{(1+r)^2} + \cdots = \frac{P_1(1+r)}{r}$$

对这两种可能性（价格在阶段 0 和阶段 1 之间活动）中的任一种，若 $V_0>I$，则企业将进行投资，所实现的净回报为

$$F_1 = \max[V_1 - I, 0]$$

这个未来最优决策的结果有时候被称为连续价值（continuous value）。从阶 97
段 0 来看，阶段 1 的价格为 P_1，从而价值 V_1，F_1 都是随机变量。记 E_0 为利用阶段 0 的可能信息算出的期望（即概率加权平均），则我们有

$$E_0[F_1] = q\max\left[\frac{(1+u)P_0(1+r)}{r} - I, 0\right] + (1-q)\max\left[\frac{(1-d)P_0(1+r)}{r} - I, 0\right] \tag{4-2}$$

这可以称为期望的连续价值，或称为连续价值，但被理解为期望值。

现在回到阶段 0，这时企业有两种选择。若立即投资，则企业所获收益为期望现值减去投资成本，即 $V_0 - I$；若不进行投资，企业得到由前面推导出来的连续价值 $E_0[F_1]$，但这个价值在阶段 1 才开始取得，必须用因子 $\frac{1}{1+r}$ 来贴现到阶段 0。显然，最优决策就是产生更大收益的那一种。因此，整个投资机会都是最优安排的投资的利润的净现值，记为 F_0，我们有

$$F_0 = \max\left\{V_0 - I, \frac{1}{1+r}E_0[F_1]\right\} \tag{4-3}$$

企业的最优决策是使得这个净现值最大化的决策。

上述分析展示了动态规划的基本思想。我们将整个决策过程分为两个部分：即时选择和后续选择。这些选择的所有效果被总结到连续价值中。为找到最优决策序列，我们采用回溯法。在最后一个决策点，我们能作出最优决策并找到连续价值（即我们例子中的 F_1）。在前一个决策点，我们知道期望的连续价值，因而我们能优化当前选择。在我们的例子中只有两个阶段，因此，决策到此就结束了。对有多个阶段的情形，重复上述过程即可。

在阶段 1 投资机会仍然存在的决策要比基于"勿失良机"必须在阶段 0 作出投资的决策受到较少的限制。式（4－1）给出了后一种情形下的回报 Ω_0，因为在这一情形下，决策过程在时间 0 就终止了，可称为在时间 0 的终止价值（termination value）。现在我们有来自式（4－3）的限制更少的决策问题的净现值 F_0。二者的差（$F_0 - \Omega_0$）正好为额外自由的价值，即决策的延期期权（option to postpone）。

在第 2 章中，我们对这个一般模型中的一些特殊情形计算了投资机会的
98 价值 F_0 和终止价值 Ω_0，其中给出了参数 P_0、q 等的具体数值。读者可复习那些例子，并将它们放到我们这里所讲的一般理论中去。这里我们指出那些结论的一些特征。由图 2—4 可以看出，这些价值是初始价格 P_0 的函数。当 P_0 超过临界值 249 美元时，企业发现立即投资是最佳选择，因而推迟期权没有价值，故 $F_0 = \Omega_0$，并在此价格范围内（$P_0 > 249$ 美元）等于 $V_0 - I$。当 $P_0 < 249$ 美元，这时最优的选择是等待，因而 F_0 的图像高于 Ω_0 的图

像。在第2章的另一个例子的图形中，当其他参数变动时，类似的性质同样成立。在表示机会的全部价值 F_0 的直线与表示终止价值 Ω_0 的直线的交叉处，我们找到了立即投资是最优的临界点。

为更好地理解那些影响推迟期权的价值的因子，我们更进一步地考察 F_0 和 Ω_0 之间的差异。(1) 企业推迟了决策也就放弃了在阶段0的收益 P_0，这种差异支持立即行动。(2) 推迟决策同样意味着推迟投资成本，这种差异支持等待，因为利率为正。(更一般的情形是，投资成本本身会随时间而变化，这时将带来新的问题。例如，若企业预期设备成本随时间推移会变得更便宜，这会是等待的另一种理由。) (3) 这也是最重要的，等待使我们可以就价格上升或下降这两种可能情况下的每一种分别优化。这样一来，立即行动必须基于二者的平均。对不同的可能性可采取不同的行动，特别地，制止在价格下降时投资，使得等待的额外自由有了价值。[1]

4.1.2　多阶段模型

我们来推广上面的两阶段模型。在后面的章节中，我们主要应用时间为连续的情形，状态变量的不确定性由维纳过程或更一般的扩散过程的形式给出。然而，在本节中，我们在不确定性由离散时间马尔可夫过程给出的情形下来说明动态规划。在这种情形下，许多一般性质可以更容易地证明。并且，后面章节所讨论的随机过程可以看成是离散时间马尔可夫过程的极限。正如我 99
们在第3章所看到的，扩散过程是马尔可夫过程，当每一时间区间的长度和随机游动的每一步的步长适当地变小时，它可看成是离散时间随机游动的极限。

因为我们所考虑的问题是其在投资方面的应用，所以我们主要考虑一家企业的决策行为，但我们考虑的问题对一般情形也同样适用。企业当前状态由状态变量 x 来表示，它将影响企业的决策以及扩张机会。为简单起见，假设 x 的取值为标量（实数），但我们的理论可以很容易地推广到任意维度的矢量状态。在任何时间（或阶段）t，变量 x_t 的取值已知，但未来取值 x_{t+1}，x_{t+2}，…为随机变量。假设过程 $\{x_t\}$ 为马尔可夫过程，即与未来值的概率分布的决定有关的信息都包括在当前状态 x_t 中。

在每一阶段 t，企业面临多种选择，我们用控制变量 u 来表示这些选择。在上面的例子中，企业面临的选择仅有立即投资或等待，我们可取 u 为一个二元标量，其中 $u=0$ 表示等待，而 $u=1$ 表示立即投资。在其他应用中，例如，若投资规模也是被选择的因素，则 u 可取为连续变量。若企

业除了投资成本外还有其他选择，例如，在时刻 t 雇用工人，这时的 u 是一个向量。控制变量在时刻 t 的取值 u_t 仅仅依赖于时刻 t 的信息，即 x_t。

在时刻 t 的状态变量和控制变量影响企业即期的利润流，我们将它记为 $\pi_t(x_t,\ \mu_t)$。这里相应的控制变量 u_t 可能是雇用工人的数量或所购买的原材料的数量等。在阶段 t 时的 x_t，u_t 同样也影响未来状态的概率分布。这里 u_t 可能是投资额或研究与开发费用（R&D），甚至是放弃该企业的决策等。令 $\Phi_t(x_{t+1}|x_t,u_t)$ 表示以当前信息（指状态或控制变量）为条件、状态变量在下一阶段的累积概率分布函数。

在任意两阶段之间的贴现因子为 $\frac{1}{1+\rho}$（ρ 为贴现率）。我们的目标是在时间上选择一系列的控制变量 $\{u_t\}$，使收益的期望净现值最大化。有时我们限制我们的决策在某一时刻 T 终止，并且最后的回报依赖于最后所达到的状态。记此最终回报函数（terminal payoff function）为 $\Omega_T(x_T)$。

现在，我们来应用基本的动态规划知识。注意我们的思路是将决策过程分为两个部分，即刻的阶段以及后续阶段。假设当前时刻为 t，状态为 x_t。
100 我们用 $F_t(x_t)$ 表示企业从这一点开始最优地作出全部决策的结果，即企业的全部现金流的预期净现值。

当企业选择控制变量 u_t，它所得到的即期现金流为 $\pi_t(x_t,\ u_t)$。在下一阶段（$t+1$），状态为 x_{t+1}。最优决策产生的结果为 $F_{t+1}(x_{t+1})$。在时刻 t 看来，这一结果为随机变量，因而我们必须对它取期望值 $E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]$。这也就是我们所说的连续价值。[2]贴现到时刻 t，即期现金流和该连续价值之和为

$$\pi_t(x_t,u_t)+\frac{1}{1+\rho}E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]$$

企业将选择 u_t 使上式最大化，并且结果刚好为 $F_t(x_t)$，因此有

$$F_t(x_t)=\max_{u_t}\left\{\pi_t(x_t,u_t)+\frac{1}{1+\rho}E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]\right\} \tag{4-4}$$

隐藏在这个公式下的结论在贝尔曼（Bellman）最优化原理中得到了正式说明：一种最优决策有下述性质，无论初始行为怎样，剩余决策组成一个以初始行为的结果为初始状态的最优决策。其中剩余选择 u_{t+1}，u_{t+2} 等的最优结果为剩下的连续价值之和，因而只需选择最优的即期控制 u_t 即可。

式（4-4）称为贝尔曼方程（Bellman equation），或最优化基本方程（fundamental equation of optimality）。式中，右边第一项为即期收益，第二

项为连续价值，该阶段的最优决策是使得这两项之和最大化的决策。

在两阶段例子中，即期投资的收益为 $V_0 - I$，等待虽没有回报而仅有贴现的连续价值 $\frac{E_0[F_1]}{1+r}$，在这种方案中的最优二元选择所选出的是两者中较大的一个。因此，我们以前导出的式（4－3）是一般的贝尔曼方程式(4－4)的特例。

如果多阶段问题具有固定的有限期界 T，我们可类似地从最后一个时 101
刻开始向前分析。在时间期界的最后时刻 T，企业得到的最终回报为 $\Omega_T(x_T)$。则在此阶段的前一阶段我们有

$$F_{T-1}(x_{T-1}) = \max_{u_{T-1}} \left\{ \pi(x_{T-1}, u_{T-1}) + \frac{1}{1+\rho} E_{T-1}[\Omega_T(x_T)] \right\}$$

故我们可知在 $T-1$ 期的价值函数。接着我们可以求出 u_{T-2} 的最大化问题，并导出价值函数 F_{T-2}（x_{T-2}），依此类推。这种过程一度被认为太复杂而实用性不强，从而产生了间接的计算方法。然而，计算机技术的进步使这种后溯计算方法非常适用。后面章节中的一些数值模拟就采用了这种方法，本章最后将提供这种方法的一个例子。

4.1.3　无穷期限

若决策问题没有固定的有限时间期界，就没有最后的价值函数使我们可以依此向后进行计算。然而，问题的递归结构不仅使理论分析变得简单，也使得数值解法变得可行。关键的简化在于无穷期界所导出的式（4－4）和 t 以前的状态无关。当然，当前状态 x_t 确实起作用，但是日历日期 t 自身却没有影响。这使得利润流函数 π、转移概率分布函数 Φ 以及贴现率 ρ 都与实际标记的日期 t 独立。许多经济应用满足或假设了这一条件。

在上面的假设下，除了新的出发状态，单阶段问题实际上就与上面的问题一样了，因而价值函数对所有阶段都一样。因此，我们将价值函数写成 $F(x_t)$，函数下面关于时间的下标就不标准了。对任何时间 t 的贝尔曼方程变为

$$F(x_t) = \max_{u_t} \left\{ \pi(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho} E_t[F(x_{t+1})] \right\}$$

因 x_t 和 x_{t+1} 可能是任何可能状态，将它们记成一般形式 x 和 x'。则对任意的 x，我们有

$$F(x)=\max_{u}\left\{\pi(x,u)+\frac{1}{1+\rho}E[F(x')|x,u]\right\} \qquad (4-5)$$

式中的期望是在已知当前阶段的 x 和 u 的条件下求得的。这就是无穷水平
102 动态规划问题的递归贝尔曼方程。

因为没有固定的终止日期可以使我们采用后溯法求解，我们似乎没有一个明显的构造性的方法去找出价值函数 F。而如果不知道函数 F，我们也就无法通过求解贝尔曼方程右边的最大化问题来找到最优控制 u。因此我们需要保证式（4－5）的解的存在性以及找到这个解的方法。幸运的是，这两个问题并不很困难。

递归贝尔曼方程式（4－5）可看成一簇方程，只要知道 x 的每一个可能值中的一个，就知道未来的所有方程，即 $F(x)$ 的所有值。若 x 只取有限个离散值 x_i，则式（4－5）可以看成一个联立方程组，方程的个数与未知量 $F(x_i)$ 的个数相同。更一般地，我们可将式（4－5）看成泛函方程（functional equation），其中整体函数（whole function）F 是未知的。

不管表面形式怎样，式（4－5）是非线性方程。最优选择 u 依赖于式（4－5）右边的期望，也就是说依赖于出现过的所有值 $F(x')$（因为期望可以看成 $F(x')$ 依一定概率的加权平均数）。将最优选择 u 带回到式（4－5），所得到的结果可能是 $F(x')$ 的非线性函数。

一般来说，对非线性泛函方程我们并不知其是否有解，更不用说解的惟一性了。幸运的是，递归贝尔曼方程有一个非常特殊的结构，使得我们在经济应用的一些典型条件下可以证明方程 $F(x)$ 的解的存在性与惟一性。从应用上来考虑，这是一个技巧方面的问题。在本章附录 1 中，我们给出了证明的一个框架。有兴趣的读者可以阅读一些更理论化的著作（Stokey, Lucas and Prescott, 1989, Chap. 4, and Chap. 9）。但该技巧的证明确实有间接的回报，它实质上是一种可操作的求解方法。

我们可以用迭代的过程来求解上述递归贝尔曼方程。从任何一个猜测的真实价值函数 $F^{(1)}(x)$ 出发，将它用到式（4－5）右边，找到一个相应的最优选择 u^1，u^1 可表示为 x 的函数。将 u^1 带回方程，在方程右边得到 x 的一个新函数，记为 $F^{(2)}(x)$。将 $F^{(2)}(x)$ 作为一个新猜测的真实价值函数，重复上面的过程，可以得到新的最优选择 u^2，…这样得到的一系列猜测的价值函数 $F^{(3)}(x)$，$F^{(4)}(x)$，…收敛到真实的价值函数 $F(x)$。并且无论初始函数怎么选取，总可以收敛到真实的价值函数。当然，恰当猜测的初始函

数会使该过程以更少的步骤到达近似的期望精确度。

收敛的关键在于方程右边的因子 $\frac{1}{1+\rho}$ 小于 1，它可以使每一步的猜测误 103
差减小。只要利润流量是有界的，选择 u 的误差将不会增大。逐步地，将只剩下正确解。

这个过程很容易理解、编程和计算。这个过程可能会持续很长时间，特别是当贴现率 ρ 很小时，每一步只以很小的规模下降。然而，当可以让其个人计算机整天不停地运转，而不是尝试稀缺的资源时，这已经不再是禁止性的考虑了。因而这个方法越来越广泛地应用于各个领域中，甚至是计量经济学的工作中。在本章后面我们将提供这个方法的一个数值例子。

4.1.4　最优停止

有一类动态规划对我们的应用非常重要。这里，在任何阶段的选择都是二元变量（即只有两个选择）：一个是取得最后回报而终止；另一个是继续到下一阶段，下一阶段另一组相同的二元选择仍然存在。在第 2 章和第 4.1 节的投资模型中，“停止”对应于作出投资，而“继续”对应于继续等待。在这里，“继续”在该阶段内不产生任何利润流。然而，在其他问题中可能会有相应的利润流。例如，对于一家处于很恶劣的经济条件下的企业正在考虑关闭，继续经营会产生利润流（或正或负），而终止会产生厂房和设备的一定的放弃价值，以及企业必须支付给员工的全部解雇费、场地恢复和违约等的其他成本。

记 $\pi(x)$ 为利润流，$\Omega(x)$ 为终止回报，则贝尔曼方程可写为

$$F(x)=\max\left\{\Omega(x),\pi(x)+\frac{1}{1+\rho}E[F(x')\mid x]\right\} \tag{4-6}$$

对 x 值的某一范围，“终止”可使式（4-6）右边最大化，而对于其他的 x 值，“继续”可使方程右边最大化。一般来说，这个分割可以是任意的，以“终止”为最优选择的区间可以与“连续”为最优选择的区间交换。然而，大多数经济应用中有更复杂的结构。其中仅存在一个临界点 x^*，使得 x^* 的一边“终止”为最优选择，而 x^* 的另一边“连续”为最优选择。例如，在第 2 章的投资问题中初始价格的临界值为 $P_0=249$ 美元，因而在阶段 0，在 P_0 的右边（即初始价格大于 249 美元），投资是最优选择；而在 104
P_0 的左边（初始价格小于 249 美元），等待是最优选择。在我们所有的应用中都有类似的性质，并且我们还可以从直观上判断在临界点的哪一边什么行

为是最优的。为帮助读者理解，我们来解释导致这一结果的一些条件。我们仅从直观上来讨论这一问题，更正式的讨论见附录2。

为确定起见，我们来考察这样一个例子：在 $x>x^*$ 时，“连续”为最优选择；而在 $x<x^*$ 时，“终止”为最优选择。我们来检查什么条件使得 x 较大时，“连续”比“终止”更优。(1) 由“继续”而产生的即期利润相对于“终止”利润要高。因前者是流量，而后者为存量，我们将它们表示为可比较的形式。精确的条件 (1) 说明

$$\pi(x)+\frac{1}{1+\rho}E[\Omega(x')|x]-\Omega(x) \tag{4-7}$$

应随着 x 的增大而增大。(2) 任何当前的有利条件在经过一个很短的时间后不会突然变成了不利条件。这个条件要求随机过程 x 是正序列相关的，或具有一致性。更确切地说，若在一个阶段内 x 上升，则在下一阶段内条件分布 $\Phi(x'|x)$ 将赋予较大的值以更高的权重，即它将向右上方移动。(在技术术语中，这也就是“一阶随机占优”(first-order stochastic dominance) 的概念)。以上两个条件足以确保我们所需要的结论。

若式 (4-7) 随 x 的增大而减小，那么在 x^* 的左边，“继续”将是最优选择；而在 x^* 的右边，“终止”将是最优选择。注意到我们没有改变条件 (2)，即我们并没有要求随机过程 x 为负向一致性。

我们再强调一遍，这两个条件在我们所有的应用中都是满足的。条件 (1) 在每一个具体例子中很容易检验；条件 (2) 对常见随机游动过程，如布朗运动、均值回归过程的自回归过程以及我们所能想到的大多数经济应用过程都成立。

为简化我们的符号，以上我们没有考虑利润流和终止回报与时间 t 有关的情况。这个推广并不困难，这时临界点变成依赖于时间 t 的函数 $x^*(t)$。在下面的内容中我们主要考虑这一情形。

4.1.5 连续时间

回到第4.1.2中的一般控制问题，假设每个阶段的时间长度为 Δt。在时间连续时，我们对 $\Delta t\to 0$ 时的极限状态感兴趣。记 $\pi(x, u, t)$ 为单位
105 时间的利润率，故在长为 Δt 的时间阶段上所获利润为 $\pi(x, u, t)\Delta t$。类似地，记 ρ 为单位时间的贴现率，因而在长为 Δt 的时间区间上贴现因子为 $\frac{1}{1+\rho\Delta t}$。

现在，贝尔曼方程式（4-5）变为

$$F(x,t)=\max_u\{\pi(x,u,t)\Delta t+(1+\rho\Delta t)^{-1}E[F(x',t+\Delta t)|x,u]\}$$

两边同乘以（$1+\rho\Delta t$），整理得

$$\begin{aligned}\rho\Delta tF(x,t)&=\max_u\{\pi(x,u,t)\Delta t(1+\rho\Delta t)\\&\quad+E[F(x',t+\Delta t)-F(x,t)]\}\\&=\max_u\{\pi(x,u,t)\Delta t(1+\rho\Delta t)+E[\Delta F]\}\end{aligned}$$

两边同除以 Δt，并令 $\Delta t\to 0$，可得

$$\rho F(x,t)=\max_u\left\{\pi(x,u,t)+\frac{1}{dt}E[dF]\right\} \tag{4-8}$$

式中，$\frac{1}{dt}E[dF]$ 为$\frac{E[\Delta F]}{\Delta t}$的极限。这里必须注意，式中的期望是基于“当前”的 x 和 u 条件下的期望，并且当计算 $F(x,t)$ 在区间 dt 上的变化时，必须将 x 和 t 变化的影响都考虑进去。

贝尔曼方程的这个形式使获得利润流的权利是一种资产的观点变得清楚了，且 $F(x,t)$ 就是其价值。式（4-8）的左边表示在单位时间内我们有一个正常收益，ρ 为贴现因子，这使得决策者持有这种资产。在方程右边，第一项为资产的当期回报或分红，而第二项表示期望的资本收益率（若为负值则表示发生损失）。因此，方程右边表示持有这项资产在单位时间内所获的预期总收益。等式成立等价于无套利或均衡条件，表示投资者持有这项资产的主动性。u 的最大化表示现阶段对资本的应用是最优的。当然，我们这里的最优性不仅指当期收益，且着眼于未来价值。

式（4-8）右边的极限依赖于 x'在时间 Δt 后的期望。有两类连续性的随机过程使得式（4-8）右边的形式便于进一步分析，并且在“继续”区域内容易找到函数$F(x,t)$的解。幸运的是，这两种过程对大多数经济问题来说是很有用的。这两种过程就是我们在第 3 章中所讨论过的伊藤过程和泊松过程。在下面，我们将在这两种过程的框架下进一步讨论动态规划问 106
题。

上面的分析仅局限于一个很小的时间区间 $[t,t+dt]$ 上，所得到的式（4-8）对任何时间 t 都成立。通过选择有限的时间期界 T 并利用终止回报，或者令时间期界为无限并利用递归结构，或者其他一些途径，我们可以完成这种分析。在这些分析中，解的存在性和惟一性的严格数学证明在连续时间下变得非常困难。由于这些细节并不影响我们的应用，我们略去了它

们，并建议读者参阅弗莱明和里谢尔（Fleming and Rishel，1975）或克里洛夫（Krylov，1980）的论述。

从另一个角度来看，我们的数学被简化了。我们用一种非常不正规和启发式的方式处理了连续时间的极限，后面也将这样做。然而，很有必要提醒读者，一些非常难以处理而且必须以更严格的方式小心处理的问题被掩盖了。在离散时间下，我们规定在当前阶段 t 采取的行动 u_t 可以取决于当前状态 x 时的信息，而不是未来的随机状态 x_{t+1}。在连续时间下，这两者结合在一起。我们必须小心谨慎，以便使选择不依赖于有关未来的信息，即使是“下一时刻”也不行。否则，我们将根据后见之明而行事，并且获得无限的利润。从技术上来看，允许不确定性在时间上是“右连续的”，而策略则在时间上是“左连续的”，就可以避免这种问题。那么，对该随机过程在某一时刻发生的任何跳跃，行动直到该时刻之后才会改变。关于这一点的讨论和严格的分析，参见达菲（Duffie，1988，pp.139－140）的论述。

4.1.6 伊藤过程

推导出式（4－8）的一种简单形式的第一类连续时间随机过程是我们在第3章中讨论过的伊藤过程。第3章中的式（3－11）限定了其增量形式，这里我们仍然坚持这一点。但现在考虑漂移参数和扩散参数都依赖于控制变量 u 和状态变量 x，则伊藤过程可表示为

$$dx = a(x,u,t)dt + b(x,u,t)dz \tag{4-9}$$

式中，dz 为标准布朗运动的增量。同以前一样，记利润流为 $\pi(x, u, t)$，企业（资产）价值记为 $F(x, t)$。

令 x 为时刻 t 已知的出发状态，$x' = x + dx$ 为经过一个小的时间区间 Δt 后的随机状态。第3章中的式（3－25）描述了用于这种过程的伊藤引

107 理。将伊藤引理用于价值函数 F，我们有

$$E[F(x+\Delta x, t+\Delta t)|x,u] = F(x,t) + [F_t(x,t) + a(x,u,t)F_x(x,t) + \frac{1}{2}b^2(x,u,t)F_{xx}(x,t)]\Delta t + o(\Delta t)$$

式中，$o(\Delta t)$ 为比 Δt 更快地趋于零的项。则“均衡回报”条件式（4－8）可表示为

上善若水股票论坛 bbs.jinjiaogu.com

$$\rho F(x,t)=\max_u\{\pi(x,u,t)+F_t(x,t)+a(x,u,t)F_x(x,t)$$
$$+\frac{1}{2}b^2(x,u,t)F_{xx}(x,t)\} \quad (4-10)$$

我们可将最优控制 u 看成为 x、t；$F_t(x,t)$、$F_x(x,t)$、$F_{xx}(x,t)$；以及决定 π、a、b 的函数形式的其他参数。将最优控制 u 的表达式代入式（4-10）的右边，得到一个以 F 为因变量，x，t 为自变量的二阶偏微分方程。一般来说，这个方程非常复杂。然而，在很多应用中我们可采用解析方法或数值方法来求解。

这个方程的解法就是离散时间方程的解法的一般类推。若存在固定的时间期界 T，并且终止回报 $\Omega(x_T,\ T)$ 给定时，方程的边界条件为

$$F(x,T)=\Omega(x,T)$$

对所有 x 都成立。我们可以从时间 T 开始，利用后溯方法找到全部更早时刻 $x(x<T)$ 的解 $F(x,t)$。事实上，在实践中，我们必须选择用于方程解的计算的 x，t 的离散步长。我们将提供这种过程的两个例子。本章后面有一个例子，我们将直接计算动态规划问题；在第 10 章中有一个例子，我们将求偏微分方程本身的解。

若时间期界是无穷的，且函数 π,a,b 不直接依赖于时间 t，则价值函数也不依赖于时间 t。这时式(4-10)变为以 x 为惟一自变量的常微分方程：

$$\rho F(x)=\max_u\{\pi(x,u)+a(x,u)+F'(x)+\frac{1}{2}b^2(x,u)F''(x)\} \quad (4-11)$$

注意我们采用了标准的微积分的记号，即用“′”表示只有一个自变量的函数的全微分；用下标表示含多个自变量的函数的偏微分。一般情况下，我们 108
采用这种记号，但有时也会用下标表示全微分，例如，若函数符号因为其他原因需要用下标表示时。

在第 5 章～第 9 章的大多数投资模型中，我们经常会求解形如式（4-11）的方程，我们会逐步说明适当的求解方法。现在我们转向控制问题的一种特殊类型，即伊藤过程的最优停止问题。这个问题在我们所有的应用中都十分重要。

4.1.7　最优停止和平滑粘贴

这里我们考虑一个二元决策问题。在每一时刻，企业或持续其当前状态

上海老股票论坛 bbs.mlaogu.com

得到利润流；或终止当前状态而得到终止回报。利润流 $\pi(x,\ t)$ 和终止回报 $\Omega(x,\ t)$ 可依赖于状态变量 x 和时间 t。其中 x 服从伊藤过程：

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{4-12}$$

最明显的例子是一家企业决定是否终止经营，出售其设备而得到设备的放弃价值。投资决策可表示为这种形式："继续"意味着等待，这时利润流为零；"终止"表示投资，并且终止的回报等于项目的未来回报减去其投资成本的期望现值。

直觉表明，对每一个 t 存在一个临界值 $x^*(t)$，在 $x^*(t)$ 的一端"继续"是最优的，而在其另一端"终止"是最优的。在第 4.1.4 中我们看到，为确保这一点，利润流和终止回报必须满足一定的条件。若表达式（4-7）是 x 的增函数，则对较大的 x，"继续"相对来讲更有吸引力。在连续时间情形，若 x 服从伊藤过程，由附录 2 中的分析，对每一个 t，有

$$\pi(x) - \rho\Omega(x,t) + a(x,t)\Omega_x(x,t)$$
$$+ \frac{1}{2}b^2(x,t)\Omega_{xx}(x,t) + \Omega_t(x,t)$$

这应是 x 的增函数。类似地，若上述表达式为 x 的减函数，则对较大的 x，"终止"相对来讲更有吸引力。在我们的应用中，上面两个条件中总有一个成立。为了说明上的方便，在我们的例子中采用的是前一个条件成立。

给定上述条件，我们可将临界值 $x^*(t)$ 看成 t 的函数，则 $x^*(t)$ 的图像构成一条曲线将 (x,t) 平面分成两个区域，在曲线上方"继续"为最优选择①；在曲线下方，"终止"为最优选择②。当然我们事先并不知道曲线 $x = x^*(t)$ 的方程，它作为动态规划问题的解的一部分需要我们将它找出来。

109 现在，最优停止问题的贝尔曼方程式（4-6）变为

$$F(x,t) = \max\{\Omega(x,t), \pi(x,t) + (1+\rho dt)^{-1}$$
$$\times E[F(x+dx, t+dt)|x]\}$$

在连续区域中，右边第二项较大。根据伊藤引理将上式展开并像以前那样化简，得到关于价值函数的偏微分方程：

$$\frac{1}{2}b^2(x,t)F_{xx}(x,t) + a(x,t)F_x(x,t)$$
$$+ F_t(x,t) - \rho F(x,t) + \pi(x,t) = 0 \tag{4-13}$$

---

① 称此区域为继续区域。——译者注

② 称此区域为终止区域。——译者注

对 $x>x^*(t)$，上式成立，我们还需找到在 $x=x^*(t)$ 时使上式成立的边界条件。由贝尔曼方程我们知道，在停止区域有 $F(x,t)=\Omega(x,t)$。由连续性得下述条件：

$$F(x^*(t),t)=\Omega(x^*(t),t) \tag{4-14}$$

对所有 t 成立。这个条件通常被称为“价值匹配”（value-matching）条件。因为它要求未知函数 $F(x,\ t)$ 的值与已知的终止回报函数 $\Omega(x,\ t)$ 相同。

但边界本身是未知的：在（x，t）空间中，使偏微分方程式（4－13）成立的区域是内生的（由方程自身决定的）。该区域的边界，即曲线 $x^*(t)$，被称为自由边界。因此，求解方程并决定其有效区域的全部被称为一个自由边界问题。

显然，为解出 $F(x,t)$ 及边界 $x^*(t)$，除条件式(4－14)外我们还需要第二个条件。偏微分方程的数学理论在这方面没有帮助；应用于自由边界的这个条件依赖于各种具体的应用，并且来自经济（或物理、生物等，取决于具体的情形）方面的考虑。对我们这里考虑的问题来说，正确的条件是要求对任意的 t，$F(x,t)$ 和 $\Omega(x,t)$ 的值作为 x 的函数在边界 $x^*(t)$ 相切，即

$$F_x(x^*(t),t)=\Omega_x(x^*(t),t) \tag{4-15}$$

对所有 t 成立。这个条件称为“高阶联系”（high-order contact）或“平滑粘贴”（smooth-pasting）条件，因为它不仅要求两个函数的值在边界处相等，而且要求两个函数的导数或斜率在边界处也相等。

尽管连续性非常直观，但斜率的连续性或平滑粘贴是值得注意和推敲的。然而有关这方面的讨论技巧性很强，我们将它留在附录 3 中。这里我们仅说明它是怎么起作用的。

4.1.8　例：机器的最优放弃 110

后面几章有很多关于动态规划及或有债权分析的应用。我们已经在一般的情形下非常详细地说明了这些理论，下面提供的具体例子将是有用的。这里我们并没有详细地解答例子，只在直观上给出了解的方法。我们希望用这个例子说明在特定背景下的各种步骤，并为读者即将遇到的更详细的应用奠定基础。

假设这里的资产是用来生产虚拟产品的机器，其寿命为 T 年。由于机器逐年磨损会降低其产出能力或需要更高的维护成本，而且由于经济中其他方面的技术进步会使该机器与新机器相比其竞争力下降，因此，机器的盈利

能力在其寿命期间逐年降低。由于一般的商业周期或对虚拟产品的特殊性质的需求变化，对机器的生产能力还有随机性冲击。设状态变量 x 为现在运营的收益流，并假设其变化满足

$$dx = a\,dt + b\,dz$$

式中，$a<0$，表示利润流在机器的寿命期间逐年下降。

在机器寿命的任何时间内，企业可淘汰机器。若当前利润流为负，则淘汰变得更有吸引力。然而，机器一旦被淘汰，它将很快锈蚀，收益流恢复时，重新启动它的成本非常大。因此企业必须预先看到将来的这些可能性才能作出淘汰的决策。为保持机器处于运营状态，企业可能会承受一定的损失。当然，若机器接近其使用寿命，则企业就不大可能再愿意接受损失，因而我们必须跟踪当前利润 x 和机器年限 t 这两个变量。从直观上来说，存在这样一条临界曲线 $x^*(t)$，当 x 低于这条曲线时机器就被淘汰。

实际用于计算的参数是 $T=10$ 年，$\rho=0.10$/年，$a=-0.1$/年和标准差 0.2/年或方差为 0.04/年。为获得数值解，我们利用布朗运动的离散逼近。取 $\Delta t=0.01$ 或 3.65 天。相应地，利润变量 x 的每一个离散步的增量为$\Delta h=b\sqrt{\Delta t}=0.02$。

我们直接应用第 4.1.2 的方法解此动态规划方程。从无须考虑未来的时间 T 出发，采用后溯方法逐步求解。图 4—1 显示了问题的解。其中图4—1(a)显
112 示了最优临界曲线——(t,x)空间内的自由边界 $x^*(t)$。在每一时刻，若当前 x 在曲线上方，则机器保持运营，其价值函数 $F(x,t)$ 满足对应于式(4-13)的微分方程，即

$$\frac{1}{2}b^2F_{xx}(x,t)+aF_x(x,t)+F_t(x,t)-\rho F(x,t)+x=0$$

若 x 在曲线下方，机器被淘汰，终止价值为零。(通过指定一些其他的放弃价值函数，我们也可获得相应的解。) 注意，当机器接近其物理寿命时，临界值接近于零——因为在机器寿命要终止时，我们没有理由保持一个引起损失的机器而期待未来的转变。机器剩余寿命越长，企业越愿意承受损失而保留机器（因 x 是随机的，未来可能会出现产品价格上涨等机会）。然而，这种效应最终会稳定下来。在 10 年期限内，对一个崭新的机器，企业愿意保持它的运营，即使当前损失是 0.15。

图 4—1(b) 显示了价值函数 $F(x,t)$ 对不同的 t 作为 x 的函数的图像。如我们所期望的，x 越大，机器的价值越高。然而，即使对 $x=0$，机

器仍有价值，因为我们假定 x 是一个简单的布朗运动，x 的值在未来有可能会上升。注意到价值匹配和平滑粘贴的条件成立：对任意选定的 t，当 x 接近 $x^*(t)$ 时，$F(x, t)$ 和 $F_x(x, t)$ 接近于零。

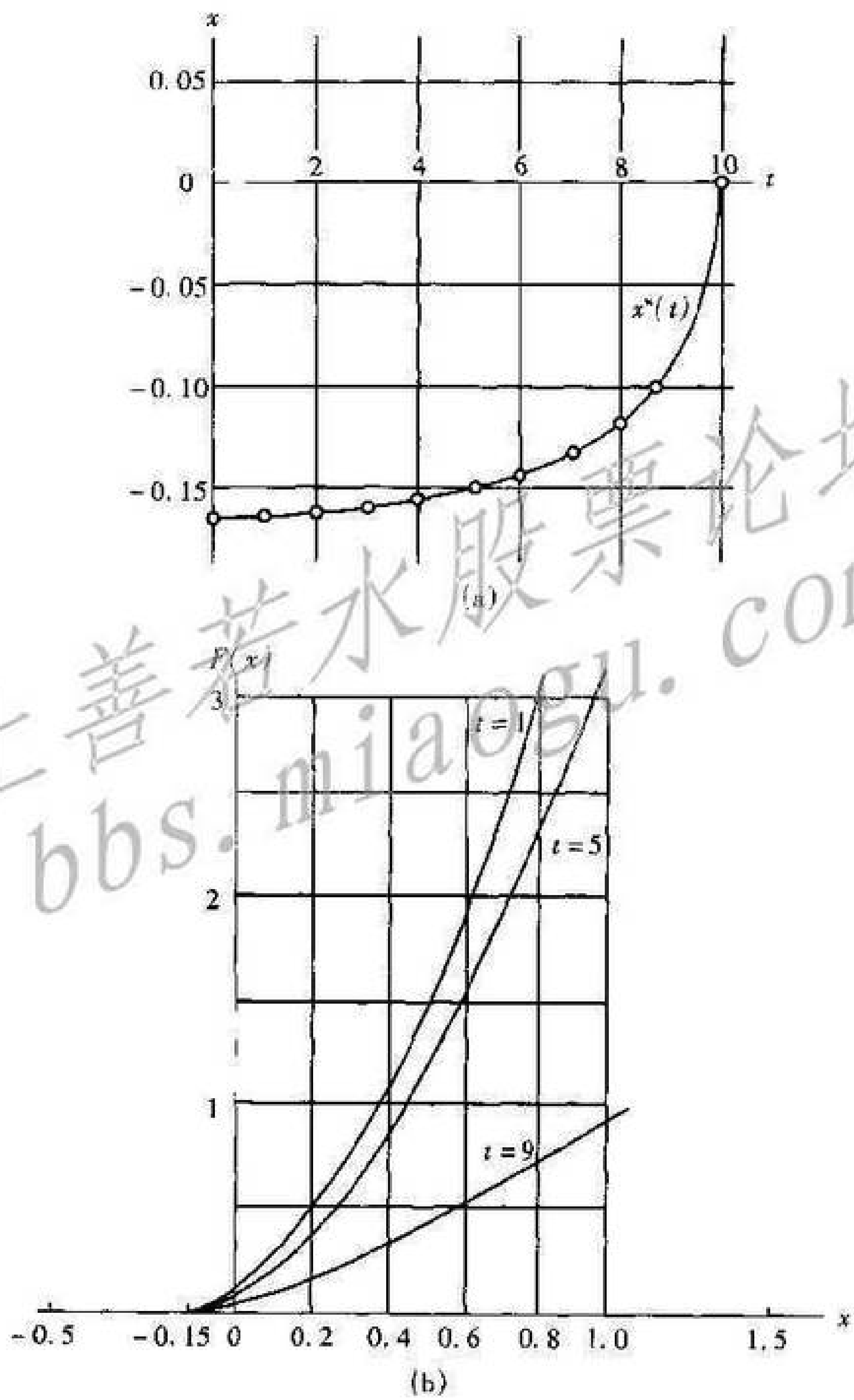


图 4—1　折旧及放弃

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

当机器的物理寿命很长，实际上我们可把它看做无限时情况会怎样？这时可去掉时间 t，而直接解关于 $F(x)$ 的方程，或在式（4－13）中将时间去掉，并将它写作一个常微分方程：

$$\frac{1}{2}b^2F''(x)+aF'(x)-\rho F(x)+x=0$$

利用价值匹配和平滑粘贴条件：$F(x^*)=0$，$F'(x^*)=0$，我们可找到方程的解 $F(x)$ 及临界值 x^*。在第 5 章～第 7 章中，我们将更详细地论述这个过程，有兴趣的读者可试着求解此方程。我们的数值解是放弃机器的临界值 $x^*=-0.17$。这样，只要考虑到未来对吸收当前损失的意愿的影响，10 年的寿命差不多已接近无限。

4.1.9 泊松过程

第 3 章介绍了泊松（跳跃）过程。在一个很短的时间区间 dt 内，随机
113 变量 x 发生跳跃的概率为 λdt，其中 λ 为跳跃的平均发生率。若跳跃发生，其跃度为 $g(x,t)u$，其中 $g(x,t)$ 为已知函数，u 为随机变量。x 不发生随机跳跃的概率为（$1-\lambda dt$），这时 x 增加一个固定的量 $f(x,t)dt$。采用与布朗运动类似的记号，将它记为

$$dx=f(x,t)dt+g(x,t)dq \tag{4-16}$$

式中，dq 为一随机变量，以 λdt 的概率等于 u，以（$1-\lambda dt$）的概率等于零。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

考虑状态变量服从泊松过程时的动态规划问题。我们用最优停止问题来说明这一点，因为这就是本书最通常的一种应用。同样，x 的值分为两个区域，停止区域（在这一区域中，“停止”为最优选择，终止价值为 $\Omega(x,t)$）和继续区域（至少在下一个小的时间区间 dt 内，“继续”为最优选择，即期利润流为 $\pi(x,t)$）。在这种情形下，资产价值的回报方程式（4－8）会有什么变化呢？我们来导出这种情形下的资产回报方程。

首先，假设 u 为一已知非随机常数，则 dF 的变化有两种可能，依赖于从 x 到 $x+g(x,t)u$ 的跳跃是否进入停止区域。若 $x+g(x,t)u$ 进入停止区域，则

$$dF=\lambda dt[\Omega(x+g(x,t)u)-F(x,t)]$$
$$+(1-\lambda dt)[F(x+f(x,t)dt)-F(x,t)]$$

将上面的式子代入方程式（4－8），并令 $dt\to 0$，我们有

$$\rho F(x,t)=\pi(x,t)+\lambda[\Omega(x+g(x,t)u)-F(x,t)]+F_x(x,t)f(x,t) \qquad (4-17)$$

若 $x+g(x,t)u$ 仍在继续区域中，我们得到一个类似的方程，只不过用 $F(x+g(x,t)u)$代替式（4－17）中的 $\Omega(x+g(x,t)u)$。更一般地，当 u 为随机变量时，必须同时考虑这两种情形，通过对 u 的分布取期望我们可得到一个组合的方程。

注意一个新事实：与伊藤过程情形中的偏微分方程式（4－13）不同，式（4－17）并不局限于连续区域。我们不能对两个区域分开求解再将它们粘贴在终止边界上。因而对一般的泊松过程，最优停止问题变得相当复杂。

然而，我们有一些简单的情形。假设跳跃发生，它总是跳到一个相同的已知点 x_0。若 x_0 在连续区域内，我们有

$$(\rho+\lambda)F(x,t)=\pi(x,t)+\lambda F(x_0,t)$$

若 x_0 在停止区域，对 $\Omega(x_0,t)$ 我们有类似的方程成立。例如，x_0 对应利润流的突然停止，则 $\Omega(x_0,t)=0$ 且 $F(x,t)=\dfrac{\pi(x,t)}{\rho+\lambda}$。这里的泊松发生率 λ 的作用在于增加贴现率 ρ。 114

在后面的章节里，我们将讨论不确定性服从一些易于分析的简单的泊松过程的应用。在一些例子中，还有一些混合的模型，其中变量 x 以一特定的失效率服从泊松跳跃，并且在没有跳跃的时候服从伊藤过程。那么，这些方程及它们的解就包含了我们这里所列出的特征。

上善若水股票论坛 bbs.m1008u.com

4.2　或有债权分析

在研究最优停止问题的时候，我们将 $F(x,t)$ 解释为资产的价值。该资产为其所有者赋予企业未来的利润流 $\pi(x,t)$。式（4－8）表示这样一个条件：投资者持有这项资产很短的一段时间，即期利润流和期望的资本收益构成总的投资回报率 ρ。我们指定此贴现率是外生的，但在实际中它也被解释为资本的机会成本。因此，它应当等于投资者将资本投入具有相同风险特征的其他投资项目的回报率。现在，我们更明确地阐述这一思想，并将它推广以便提供一种更好的风险处理方法。

金融经济学已经发展出描述投资者决策并来自于这些决策的综合作用的

市场均衡及资产均衡的复杂理论。一个基本的假定是经济中存在大量可交易的具有不同回报率和不同风险的资产。为对一个新资产进行定价，我们可通过现有可交易资产的组合来复制新资产的回报和风险，则新资产的价格必须等于该组合的市场价格。否则，追求利润的套利者可利用二者的不一致，购买较便宜的资产通过重新包装，再以较高的价格卖出去，因而等价资产或资产组合（指两种资产的回报和风险都相同）的价格在均衡中不一致将不能保持。在我们的分析中处于继续区域内的资产可用这种方式进行分析。我们的大多数理论都是在不确定性可用伊藤过程来描述的框架下进行的。

4.2.1 资产组合的复制

我们从最简单的情形开始。假设利润流依赖于变量 x，x 看做企业的产

115 出价格。因为将处理的是回报的百分比增长，假设 x 服从几何布朗运动可使我们的分析更加方便。我们有

$$dx = \alpha x dx + \sigma x dz \tag{4-18}$$

式中，α 为增长率参数；σ 为比例方差参数；dz 为标准维纳过程的增量。在后面还可将此进一步推广。

假设企业的产出本身可作为一种资产在金融市场上交易。如产出为石油、铜等商品时，这在理论上是可行的。后面我们将证明，只要 x 的风险，即式（4-18）中的 dz 项能够用某一可交易资产或资产组合复制，则上述假设成立。

同任何资产一样，只有该产出能产生充分高的回报时，投资者才持有该项资产。部分回报来自于期望的价格增长 α；另一部分来自于直接分红（如产品可能是产出更多木材的树木）或间接分红（如石油或铜的持有者可能是以该种产品为投入品的企业，它发现持有该种产品的存货要比依靠现货市场好，这时的分红是隐性的"便利收益"（convenience yield））。我们将在第5章和第6章更详细地讨论这种便利收益，这里仅把它看成一种红利，并记其比例为 δ。令 $\mu = \alpha + \delta$，表示总的期望回报率。

这个期望回报必须足以弥补持有该项资产所带来的风险。当然该风险不是这些有影响的风险，而仅是不可分割的风险。整个市场组合提供了最大可能的多样性，因此，是资产回报率和整个市场组合的协方差决定了风险贴息。

通过分析，我们将假设无风险回报率 r 是外生决定的，如政府债券的回报率。[3] 由资本资产定价模型（CAPM），得出均衡的基本条件为

bbs.mlaogu.com

$$\mu = r + \phi\sigma\rho_{xm} \tag{4-19}$$

式中，ϕ 为总体的市场参数(风险的市场价格)，在我们的分析中它是外生变化 116
的；ρ_{xm} 为特定资产 x 的回报与整个市场组合 m 的回报间的相关系数。[4]

利用已知价值的可交易的资产来复制企业的回报和风险特征，我们找到利润流为 $\pi(x, t)$（实际上是赋予其所有者获得利润流的资产的价值）的企业的价值 $F(x, t)$。特别地，考虑投资1美元到无风险资产中，同时也购买该企业 n 单位的产品，我们将寻求合适的 n 来获得所要的复制。这个组合成本为（$1+nx$）美元。持有该组合一个很短的时间区间 $\mathrm{d}t$，在这段时间里，无风险资产有确定的回报 $r\mathrm{d}t$，而其他资产支付红利并获得随机的资本收益。因而所投资的每1美元的总收益为

$$\frac{r+n(\alpha+\delta)x}{1+nx}\mathrm{d}t+\frac{\sigma nx}{1+nx}\mathrm{d}z$$

将它与持有该企业所有权相同的很短一段时间区间 $\mathrm{d}t$ 的价值相比较。首先要花费 $F(x, t)$ 购买企业，所获得的分红就是收益 $\pi(x,t)\mathrm{d}t$。若作出初始决策时，x 已知，其中就没有不确定性。[5] 该项资产同样产生一个随机的资本收益，根据伊藤引理，我们有

$$\mathrm{d}F=\left[F_t(x,t)+\alpha xF_x(x,t)+\frac{1}{2}\sigma^2x^2F_{xx}(x,t)\right]\mathrm{d}t+\sigma xF_x(x,t)\mathrm{d}z$$

投资的每1美元收益为

$$\frac{\pi(x,t)+F_t(x,t)+\alpha xF_x(x,t)+\frac{1}{2}\sigma^2x^2F_{xx}(x,t)}{F(x,t)}\mathrm{d}t+\frac{\sigma xF_x(x,t)}{F(x,t)}\mathrm{d}z$$

如果我们的组合复制了拥有该企业的风险(即 $\mathrm{d}z$ 项的系数相同)，n 必须满足

$$\frac{nx}{1+nx}=\frac{xF_x(x,t)}{F(x,t)}$$

然而，在市场中风险相同的资产必须获得相同的回报，因而上述选择必须确保

$$\frac{\pi(x,t)+\alpha xF_x(x,t)+\frac{1}{2}\sigma^2x^2F_{xx}(x,t)}{F(x,t)}=\frac{r+n(\alpha+\delta)x}{1+nx}$$

将 $\frac{nx}{1+nx}$ 代入上式，右边变为 117

$$r\left[1-\frac{xF_x(x,t)}{F(x,t)}\right]+(\alpha+\delta)\frac{xF_x(x,t)}{F(x,t)}$$

化简，回报方程变为关于价值函数 F 的偏微分方程：

上海若木股票论坛 bbs.miaogu.com

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 F_{xx}(x,t) + (r-\delta)xF_x(x,t) + F_t(x,t) - rF(x,t) + \pi(x,t) = 0 \tag{4-20}$$

式（4-20）与利用动态规划方法推导出的式（4-13）惊人地相似。事实上，若我们在动态规划中采用 $a(x, t) = \alpha x$，$b(x, t) = \sigma x$ 的几何布朗运动，得到的结果几乎完全一样。惟一不同的是无风险利率 r 代替了外生的贴现率 ρ，而 F_x 的系数由 α 变成了（$r-\delta$）。在第 4.3 节中我们将讨论动态规划法与或有债权分析之间的这种对应关系。

推导出相同结果的另一种等价方法是构造一个由该企业和 n 单位资产 x 的空头所组成的投资组合，选择 n 使得这个组合是无风险的。这在代数上更简单一些，在以后我们一般采用这种方法。然而，前面所给出的方法更直接、更清楚地说明了构造复制组合的概念。

4.2.2 生成资产的应用

即使 x 的风险不能直接在市场上交易，如果某种资产或资产组合描述或生成了 x 的不确定性，这种资产或资产组合能够交易也就足够了。下面说明怎样进行这一过程。将 x 推广到服从式（4-12）所示的任一伊藤过程，我们展示用另外的方法来复制 x 的风险。

假设存在一种可交易的资产，其随机变动与 x 的随机过程完全相关。（这种可交易资产可以是股票或期货合约之类的一种简单资产，也可以是简单资产的动态组合，即资产组合的内容可不断地调整，使得组合的价值与 x 的过程完全相关。）为使读者注意参加交易的资产描述或生成了 x 的风险，我们称其为生成的资产（即复制的资产）。记 X 为其市场价格，则随机过程 X 必然有以下形式（与 x 的形式相同）：

$$dX = A(x,t)X dt + B(x,t)X dz \tag{4-21}$$

118 注意以下两点：(1)系数 $A(x, t)$ 和 $B(x, t)$ 是状态变量 x 的函数，而不是用来复制的资产 X 的函数。这是为了与状态变量包含了经济体现有状态的所有信息的解释保持一致。(2) 资产价格变动程式（4-21）的系数 $A(x, t)$和 $B(x, t)$ 与状态变量的演变过程式（4-12）中的系数 $a(x, t)$ 和 $b(x, t)$ 并无联系；但若 X 与 x 的随机变化一致的话，两个维纳过程中的增量 dz 是一样的。（当我们说两个过程是一致的话，表示这两个过程有相同的实现，而不仅是有相同的概率分布。）

bbs.hdlangu.com

假设用来复制的资产也以比例 $D(x, t)$ 支付红利，则投资于该资产的每1美元在从 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 的很短一段时间内产生的总回报为

$$[D(x,t)+A(x,t)]\mathrm{d}t+B(x,t)\mathrm{d}z$$

下面我们来看当回报率为多大时投资者才愿意持有这种复制资产。由资本资产定价模型的公式，所需的期望回报率 $\mu_X(x, t)$ 为

$$\mu_X(x,t)=r+\phi\rho_{xm}B(x,t) \tag{4-22}$$

为理解这一点，将它与以前关于 x 的公式(4－19)比较。风险的市场价格 ϕ 是一个总量参数，因而它在两种情形下是相同的。X 的回报率的标准偏差为 $B(x,t)$，因两个过程的增量 $\mathrm{d}X$ 和 $\mathrm{d}x$ 是完全相关的，故 X 的回报率与整个市场的回报率之间的相关系数与 x 的回报率与整个市场的回报率之间的相关系数相同，都是 ρ_{xm}。最后，注意在资产 X 被实际持有的均衡状态下，我们必须有

$$\mu_X(x,t)=D(x,t)+A(x,t) \tag{4-23}$$

现在，考虑一个组合，它由企业和 X 的 n 单位的空头构成，购买该组合需要花费 $[F(x, t)-nX]$ 美元。在很短的时间区间 $\mathrm{d}t$ 内持有该组合，这段时间内企业支付红利 $\pi(x,t)\mathrm{d}t$，空头的持有者必须将此红利支付给多头的持有者。该组合的资本收益为

$$\mathrm{d}F-n\mathrm{d}X=\left(F_t+aF_x+\frac{1}{2}b^2F_{xx}-nAX\right)\mathrm{d}t+(bF_x-nBX)\mathrm{d}z$$

这里我们利用了伊藤引理，为简化起见，省略了对函数的讨论。为使该组合是无风险的，$\mathrm{d}z$ 的系数必须为零，即必须选取 $n=\dfrac{bF_x}{BX}$。

完成这一步后，现在我们令该组合的期望回报率等于无风险回报率，即 $r(F-nX)\mathrm{d}t$。这样做并化简，找到 $F(x, t)$ 所满足的偏微分方程： 119

$$\frac{1}{2}b^2(x,t)F_{xx}(x,t)+\left\{a(x,t)-\left[\frac{b(x,t)}{B(x,t)}\right][\mu_X(x,t)-r]\right\}F_x(x,t)-rF(x,t)+F_t(x,t)+\pi(x,t)=0 \tag{4-24}$$

这与以前得到的方程式（4－20）基本相同。

采用或有债权定价方法的优点是：这些方程的系数可由特定的模型自身得到，如 $a(x,t)$；也可以观察到或从市场中估计出来，如 $\mu_X(x,t)$。因此，可以解出上述偏微分方程而得到企业的价值。

4.2.3 平滑粘贴

上面的分析仅假设在很短的一段时间 $\mathrm{d}t$ 内持有某些资产。在时间 $t+\mathrm{d}t$

上善若水投资论坛 bbs.miaogu.com

后的情况没有涉及，但这并不影响所导出的偏微分方程式（4－24）或式（4－20）的有效性。然而，为求解这些方程我们需要边界条件，因此，有必要关注更长的时间跨度的情况。

如果前面所评价的企业具有固定的时间期界 T，即在时间 T 企业会被迫终止而取得终止回报 $\Omega(x_T, T)$，我们可以在 $F(x, T)=\Omega(x, T)$ 对所有的 x 都成立的边界条件的约束下求解上述偏微分方程。类似地，如果在某些时刻 t（$t<T$），状态变量 x 达到临界值时企业也会被迫终止。这时的边界条件为

$$F(x^*(t), t)=\Omega(x^*(t), t)$$

对所有 t 都成立。这正是前面讲动态规划时所发现的价值匹配条件式(4－14)。

有时，在知道其终止回报 $\Omega(x, t)$ 之后，企业可最优地选择其终止时间。这种决策是为了使企业的价值最大化。由动态规划的分析，我们知道这种选择确定了一个临界值或自由边界 $x^*(t)$，这时所需要的是"平滑粘贴"条件式（4－15）：

$$F_x(x^*(t), t)=\Omega_x(x^*(t), t)$$

对所有 t 都成立。

4.2.4 泊松过程

120 假设状态变量 x 服从式(4－16)中的泊松跳跃过程而不是伊藤扩散过程，我们能否像前面一样构造一个复制组合并得到类似于式(4－20)的一个方程？

大体上也许可以找到一种资产复制 $x(t)$ 的随机变化。例如，若 $x(t)$ 为石油的价格（假设石油价格服从泊松过程），用于复制的资产可以是临近期限的石油期货合约。然而，更一般的是我们必须用动态资产组合来复制 $x(t)$。该组合的成分可以随 $x(t)$ 的变化而连续地调整。若 $x(t)$ 服从扩散过程，这样做是可行的，因为 x 的路径本身是连续的，当 x 沿时间从一个值移动到另一个值时，动态组合能够连续地调整。若 x 为具有离散跳跃的泊松过程，这样做则是不可行的。

这说明当不确定性由泊松过程来描述时，我们通常需要下面两个假设中的一个：（1）泊松过程 x 的随机变化和市场组合无关，这时对风险没有作出调整，式（4－20）仍然成立，只不过 $\delta=\gamma-\alpha$（注意，这等价于在动态规划中贴现率等于无风险利率 r）。（2）作为选择，我们也可使用外生贴现率为 ρ 的动态规划。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

4.3　两种方法之间的联系

现在，读者应该看到动态规划与或有债权评价之间的平行关系。动态规划的价值函数与或有债权分析中的资产价格满足非常相似的偏微分方程。动态规划的贝尔曼方程可以根据资产价值和投资者持有该种资产的愿望来解释。或有债权分析中的边界条件来自于这种思想：投资者希望最优地选择期权的执行时间来最大化他们的资产价值。

然而，这两种方法之间也有一些差别。动态规划方法由一个特定的贴现率 ρ 出发，ρ 是外生的且是目标函数的一部分。在或有债权分析中，所要求的资产回报率是由资本市场的整体均衡条件推导出来的。只有无风险利率 r 被认为是外生的（甚至在更一般的均衡分析水平中，r 也可被认为是内生 121
的）。因此，或有债权分析方法提供了对贴现率的一种更好的处理方法。

权衡这种考虑，或有债权分析要求在市场中存在充分多的风险资产。我们试图评价的资产回报中的随机成分 dz 实际上可以由一些可交易资产（或资产的动态组合）的回报中的随机成分来复制。这是一个很强的要求——我们不仅需要该随机成分服从相同的概率分布，而且要求它们完全相关，即一个过程的每一条路径（实现）可由另一个过程完全复制。动态规划没有做这种要求，如果风险不能在市场中交易，目标函数可简单地反映决策者对风险价值的主观评价。目标函数通常被假定为利用贴现率 ρ 算出的效用函数流的现值形式。这在它自身是一个限制，但它也能够被推广。当然，我们对个人偏好没有客观信息或可观察到的信息，因此，对这个理论的检验会比较困难。

因此，我们看到，这两种方法都具有各自的优点和缺点，综合两种方法能解决大量的应用问题。在特定的应用中，其中一个可能比另一个在实践操作中更方便，不同的读者也可能感觉其中一种方法更好。但是这两种方法在它们共同的基础上没有原则上的差别。在后面的章节中，我们经常会平行地使用这两种方法，为方便起见我们也会经常从一种方法转到另一种方法。例如，第5章中我们先采用动态规划再使用或有债权分析解决这样一个很基本的投资问题——何时作出沉没支出以便获得现值为 V 的工厂，其中 V 服从几何布朗运动。这使我们可以更详细地探究两种方法之间的差别。

4.3.1　等价于风险中性的估价

对动态规划和或有债权评价之间的一种更深入的探讨产生了记录和解释

资产价值的偏微分方程解的一种有用方法。我们用已熟悉的框架来阐明这一点。假设一家企业的利润流 $\pi(x,t)$ 依赖于状态变量 x，并且我们要求该企业在有限时间期界 T 终止，其终止收益为 $\Omega(x_T,T)$。假设状态变量服
122 从几何布朗运动：

$$\mathrm{d}x=\alpha x\mathrm{d}t+\sigma x\mathrm{d}z$$

这些特殊的假设使得我们可以用最简单的方式来说明，但是读者可以看到其基本思想对更一般的情形仍然适用。

假设在时间 t 的状态为 x。记 $F(x,t)$ 为企业的价值，即获得一定的利润流的权利。我们分别用本章所介绍的两种形式（动态规划和或有债权分析）来导出 $F(x,t)$。

首先使用动态规划。设外生的贴现率为 ρ，则 $F(x,t)$ 为式（4－25）所表示的期望现值：

$$F(x,t)=E_t\left[\int_t^T \mathrm{e}^{-\rho(\tau-t)}\pi(x_\tau,\tau)\mathrm{d}\tau+\mathrm{e}^{-\rho(T-t)}\Omega(x_T,T)\right] \tag{4-25}$$

式中，E_t 为期望是基于时刻 t 时的信息。

考虑时刻 $\mathrm{d}t$ 后的状态，状态变量变为 $(x+\mathrm{d}x)$，相应地，资产价值变为 $F(x+\mathrm{d}x,t+\mathrm{d}t)$。将它表示为时刻 t 时的等价单位，我们要乘上一个贴现因子 $\mathrm{e}^{-\rho\mathrm{d}t}$。另外，$\mathrm{d}x$ 为时刻 t 时预期的增量，故我们必须取期望。因此

$$F(x,t)=\pi(x,t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-\rho\mathrm{d}t}E_t[F(x+\mathrm{d}x,t+\mathrm{d}t)] \tag{4-26}$$

我们把从 t 到 T 的整个时间区间分成了两部分——很短的时间区间 $\mathrm{d}t$ 及其后的时间区间。这个思想是动态规划中的全部本质，故式（4－26）是一个贝尔曼方程，只不过是一个特例。在这个例子中，因为在时间区间 $\mathrm{d}t$ 内无行动决策发生，因而在右边没有取最大化。

利用伊藤引理将式（4－26）右边展开，略去在 $\mathrm{d}t\to 0$ 时比 $\mathrm{d}t$ 更快地趋于零的项，可得

$$\begin{aligned}
&\pi(x,t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-\rho\mathrm{d}t}E_t[F(x+\mathrm{d}x,t+\mathrm{d}t)]\\
&=\pi(x,t)\mathrm{d}t+(1-\rho\mathrm{d}t)[F(x,t)+F_t(x,t)\mathrm{d}t+F_x(x,t)\alpha x\mathrm{d}t\\
&\quad+\frac{1}{2}F_{xx}(x,t)\sigma^2x^2\mathrm{d}t]\\
&=F(x,t)+\left[\frac{1}{2}\sigma^2x^2F_{xx}(x,t)+\alpha xF_x(x,t)+F_t(x,t)-\rho F(x,t)\right.\\
&\quad\left.+\pi(x,t)\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

上善若水股票论坛 bbs.nitaogu.com

将上式代入式(4-26)并化简，我们得到 $F(x,t)$ 满足下列偏微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2F_{xx}(x,t)+\alpha xF_x(x,t)+F_t(x,t)-\rho F(x,t)+\pi(x,t)=0 \tag{4-27}$$

这正是关于几何布朗运动的动态规划方程。其边界条件为 123

$$F(x,T)=\Omega(x,T) \tag{4-28}$$

对所有 t 都成立。根据构造可知表达式（4-25）满足此方程，换言之，式（4-25）即为该偏微分方程的解。

如果我们从推导出的方程及其边界条件出发，再寻求该方程的解，要找出这个解是非常困难的。但是，这是一个很幸运也非常例外的情形，我们在导出方程之前就已知道了方程的解式（4-25）。当然要计算式（4-25）中的期望也是一件很麻烦的工作。我们知道，给定 t 时的初始状态 x，在未来任意时刻的状态是服从对数正态分布的。而且，对 $\tau\geqslant t$，$\log x_\tau$ 的均值为 $\log x+(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2)(\tau-t)$，方差为 $\sigma^2(\tau-t)$。若 $\pi(x,t)$ 和 $\Omega(x,t)$ 具有很方便的函数形式，如幂函数或指数函数，则有可能得到清晰的表达式（4-25），否则我们只能求助于数值解法。然而，我们很快就会看到，表达式（4-25）有一些概念上的作用。

式(4-25)是具有边界条件式(4-28)的偏微分方程式(4-27)的解，这个结果实际上是费曼-柯科(Feynman-Kac)公式的一个特例。关于这一点的更详细、更严格的讨论可见卡拉扎斯和施里夫(Karatzas and Shreve,1988,p.267)的论述。[6]

现在我们从或有债权评价的角度来考虑企业的价值 $F(x,t)$。前面我们已经说明企业的价值服从偏微分方程式（4-20）：

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2F_{xx}(x,t)+(r-\delta)xF_x(x,t)+F_t(x,t)-rF(x,t)+\pi(x,t)=0$$

注意 r 为无风险利率，且 $\delta=\mu-\alpha$ 为资产 x 的分红或便利收益。边界条件仍为式（4-28）。

这里我们事先并不知道方程的解。然而，利用这一偏微分方程与由动态规划方法导出的偏微分方程式（4-27）在形式上的相似性，我们可以得到其解：后者的外生贴现率 ρ 现在由无风险市场利率来代替；几何布朗运动中 x 的增长率 α 由 $r-\delta$ 代替。换句话说，如果假设 x 服从增长率为 $\alpha'=$ 124
$r-\delta$ 的几何布朗运动，为对未来回报估价，我们可用无风险利率 r 将其贴

现。因而解可以写为

$$F(x,t)=E_t'\left[\int_t^T e^{-r(\tau-t)}\pi(x'_\tau,\tau)d\tau+e^{-r(T-t)}\Omega(x'_T,T)\right]$$

(4-29)

式中，x'为一个人为变量，在时刻 t 与 x 的初始值相同，但服从一个新的几何布朗运动：

$$dx'=a'x'dt+\sigma x'dz\equiv(r-\delta)x'dt+\sigma x'dz \qquad (4-30)$$

期望 E'_t 是针对随机过程 x'，并且基于在时刻 t 的信息。

这里，我们就有了“等价于风险中性的估价”的一个实例。等价风险中性估价在金融经济学中有非常广泛的应用和兴趣。更严格和更一般的讨论见达菲（Duffie, 1988, Section 17）与黄和莱茨伯格（Huang and Litzenberger, 1990, Chap. 8)的论述。

4.3.2 例子

我们用一些简单例子来说明这个过程。在每种情形下，我们求初始价值 $F(x, 0)$。

首先考虑没有利润流的最简单情形，并假定终止利润为 $\Omega(x)=x$。则

$$F(x,0)=e^{-rT}E_0[x_T]$$

采用等价于风险中性的观点，过程 x' 的期望为

$$E'_0[x'_T]=xe^{(r-\delta)T}$$

因此

$$F(x,0)=e^{-rT}xe^{(r-\delta)T}=xe^{-\delta T}=e^{-\mu T}xe^{\alpha T}$$

换句话说，我们认识到 x 以速率 α 增长，以风险调整利率 μ 为条件贴现其未来值。显而易见，这有助于以一种简单的方式说明一般公式并建立起读者对它们的信任。

125 下面假设 $\Omega(x)=x^\beta$（β已知），利用对数正态分布的标准结果：

$$E'_0[(x'_T)^\beta]=x^\beta\exp\left[\beta(r-\delta)T+\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)T\right]$$

及

$$F(x,0)=x^\beta\exp\left[\left(\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)+(r-\delta)\beta-r\right)T\right]$$

对 $\beta=1$，上式等于 $xe^{-\delta T}$，与上面结果一样；对 $\beta=0$，$F(x, 0)=e^{-rT}$；收益 $x^0\equiv1$ 是无风险的，因此，贴现是在无风险利率 r 下进行的。最后，

上海花木股票论坛 bbs.miaogu.com

若 β 为下述二次方程的根：

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)+(r-\delta)\beta-r=0$$

则 $F(x,0)=x^\beta$。这里增长恰好被贴现所抵消，因而我们可在初始状态 x 下评价终止收益函数，并称其为资产价值。在第 6 章及其他地方我们将用到这一结果。

对一个更具欺骗性的例子，考虑风险中性和无贴现的情形，对数值 a，b 定义：

$$\Omega(x)=\begin{cases}1, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

这时 $F(x,0)$ 为几何布朗运动从初始状态 x 出发，在时间 T 后进入区间 (a,b) 的概率。令 $b\to a$，我们得到极限 $\dfrac{F(x,0)}{b-a}$，这正是相应的概率密度。

我们的每个方法都显示出价值函数满足下述偏微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2F_{xx}(x,t)+\alpha xF_x(x,t)+F_t(x,t)=0$$

换句话说，作为资产定价公式的推论，我们已经推导出柯尔莫哥洛夫向后方程（见第 3 章附录）。①

4.4　文献导引

动态规划是由理查德·贝尔曼等人在 20 世纪 50 年代发展起来的。它是经济分析和运筹学中的标准工具，而且在一些教科书中得到讨论。对此经济 126
学家有特别简单的解释，参见迪克西特（Dixit，1990，Chap.11）的论述。其他好的解释可以在德赖弗斯（Dreyfus，1965）、哈里斯（Harris，1987）及卡米恩和施瓦茨（Kamien and Schwarz，1991）的书中找到。一个非常突出且非常完整的处理，同时还包括在动态一般均衡理论、增长理论、劳动经济学及其他主题方面的一些应用，参见斯托基、卢卡斯和普雷斯科特（Stokey，Lucas and Prescott，1989）的论述。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

---

① 注意 $F(x,0)$ 为几何布朗运动从初始状态 x 出发，在时间 T 后进入区间 (a,b) 的概率，上式正是柯尔莫哥洛夫向后方程。——译者注

在本书中，我们仅在布朗运动的最优控制和停止背景下利用动态规划。更详细但仍然停留在直觉水平上的著作，参见迪克西特（Dixit，1993a）的论述；非常严格的处理，参见弗莱明和里谢尔（Fleming and Rishel，1975）及克里洛夫（Krylov，1980）的论述。

或有债权分析是沿着布莱克和斯科尔斯（Black and Scholes，1973）与默顿（Merton，1971，1973）的先驱性文章而系统地发展起来的，尽管萨缪尔森（Samuelson，1965）的贡献值得提起，因为他在那篇文章中引入了随机微积分和平滑粘贴条件。或有债权分析现在已经成为金融经济学文献中地位显赫的部分，而且有专门的著作，如考克斯和鲁宾斯坦（Cox and Rubinstein，1985），霍尔（Hull，1989）以及加罗和拉德（Jarrow and Rudd，1983）的论述。初学者可以从鲁宾斯坦（Rubinstein，1987）和瓦里安（Varian，1987）在《经济观察杂志》（Journal of Economic Perspectives）的一个特殊座谈会上的发言中受益。考克斯和罗斯（Cox and Ross，1976）及考克斯、罗斯和鲁宾斯坦（Cox，Ross and Rubinstein，1979）利用了我们在本章前面所讨论过的布朗运动的随机游动表达式阐述了或有债权。更高级的处理包括达菲（Duffie，1988，1992）、多珊（Dothan，1990）及黄和莱茨伯格（Huang and Litzenberger，1990）的论述。

关于等价于风险中性定价及相关观点的先驱性严格处理，参见哈里森和克雷普斯（Harrison and Kreps，1979）的著作。这些观点的起源可在阿罗（Arrow，1970）与考克斯和罗斯（Cox and Ross，1976）的著作中找到。

伯恩斯坦（Bernstein，1992）的著作是关于这些观点的发展的一种极好的且非常有趣的说明。

附录

1．递归动态规划

这里我们概略地证明无穷期界动态规划的贝尔曼方程式（4－5）的解的存在性和惟一性。为方便读者，我们给出贝尔曼方程：

$$F(x)=\max_{u}\left\{\pi(x,u)+\frac{1}{1+\rho}E[F(x')|x,u]\right\} \quad (4-5)$$

127 我们寻求满足式（4－5）的函数 $F(x)$。将式（4－5）右边看做一个算子或

看做函数的函数。给定函数 $F(x)$，右边定义了一个关于 x 的新函数。当进行计算时，其解是一个返回自身的函数，用技术性术语来讲，我们找到了该算子的一个不动点。

下面进行迭代过程。从任意选择的初始函数 $F^{(1)}(x)$ 出发，将它用到式（4－5）右边，这时右边全部为已知，因此对每个 x，利用算子作用可得到一个新函数 $F^{(1)}(x)$。将算子作用于 $F^{(2)}(x)$，得到下一迭代 $F^{(3)}(x)$，依次进行下去。这样得到的函数序列 $F^{(m)}(x)$ 在 $m\to\infty$ 时的极限是什么呢？

假设不从 $F^{(1)}(x)$ 出发，我们选择一个新的初始函数 $Z^{(1)}(x)=F^{(1)}(x)+k$，式中 k 为正常数。将其代入式（4－5）右边。首先注意到：

$$(1+\rho)^{-1}E[Z^{(1)}(x')|x,u]=(1+\rho)^{-1}\{E[F^{(1)}(x')|x,u]+k\}$$

这样，在右边我们得到了额外的一项 $(1+\rho)^{-1}k$。这一项既不改变 u 最大化时的选择，也不改变其他项的值。因此，对所有的 x，算子作用于 $Z^{(1)}(x)$将产生一个新函数：

$$Z^{(2)}(x)=F^{(2)}(x)+(1+\rho)^{-1}k$$

继续这个过程，在第 m 步：

$$Z^{(m)}(x)=F^{(m)}(x)+(1+\rho)^{-(m-1)}k$$

因此，选择初始函数时，变化 k 的误差将随着迭代步数的增加以几何速度减少。在我们的迭代中，每一步减少的比例为$\frac{1}{1+\rho}$。因此，迭代极限将收敛到同一个函数 $F(x)$，而与初始函数的选择无关。这在直观上很清楚，严格的证明也不困难。在极限条件下，$F(m+1)(x)$变得与 $F^{(m)}(x)$ 相同，极限方程 $F(x)$ 是迭代步骤的不动点。很显然，它也满足泛函方程式（4－5）。这个误差以几何速度递减的性质（称为“收缩映射性质”（contraction mapping property））使得我们可以证明解的存在性和惟一性，并且迭代过程也提供了数值解法。

2. 最优停止区域 128

考虑只有继续和停止的二元选择，其贝尔曼方程由式（4－6）给出：

$$F(x)=\max\left\{\Omega(x),\pi(x)+\frac{1}{1+\rho}E[F(x')|x]\right\} \tag{4-6}$$

对于使式（4－6）右边的最大值取第二项的 x 值来讲，即

$$\pi(x)+\frac{1}{1+\rho}\int F(x')\mathrm{d}\Phi(x'|x)>\Omega(x)$$

"继续"为最优选择。当反向不等式成立时，立即"停止"为最优选择。我们将 x 区域的相应分割分别称为"继续区域"和"停止区域"。我们对这些区域的结构非常感兴趣。

对任意指定的 $\pi(x)$，$\Omega(x)$ 和 $\Phi(x'|x)$，这些区域可以是任何次序的可变区间。因此，对 x 值的最小范围，继续是最优的；而对超过该范围的 x，停止是最优的。然后，"继续"又是最优的，依次类推。然而，在很多经济问题中，我们希望对继续区域和停止区域能够由一个临界值 x^* 清楚地划分，使得对 $x<x^*$，继续为最优；而对 $x>x^*$，停止为最优（或者相反）。我们来寻找回报与分布函数的适当条件，使得上述划分成为可能。

在式（4－6）两端同时减去 $\Omega(x)$，并记 $G(x)=F(x)-\Omega(x)$，则我们有

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \max\left[0,\pi(x)-\Omega(x)+(1+\rho)^{-1}\int F(x')\mathrm{d}\Phi(x'|x)\right]\\
&= \max\Big[0,\pi(x)-\Omega(x)+(1+\rho)^{-1}\int \Omega(x')\mathrm{d}\Phi(x'|x)\\
&\quad +(1+\rho)^{-1}\int G(x')\mathrm{d}\Phi(x'|x)\Big]
\end{aligned}
\tag{4-31}
$$

我们做两个假设使得我们所需要的性质成立。

129 假设 1：表达式

$$\pi(x)+(1+\rho)^{-1}\int \Omega(x')\mathrm{d}\Phi(x'|x)-\Omega(x)$$

是 x 的单调函数；为确定起见，假设它是单调增加的。

这正是在等待一阶段后停止与立即停止之间的价值差异。等待一阶段的有利性可解释为可以等待直到最优停止时间的到来。如果函数是单调增加的，我们希望对较大的 x，继续是最优选择；对较小的 x，停止是最优选择。若函数是单调下降的，则反之。

假设 2：存在不确定性的正向一致性，即 x 的当前值增加时，关于未来状态 x' 的概率分布函数 $\Phi(x'|x)$ 也一致地增大。

如果假设 2 不成立，经过短时期后较大的 x 在当前的相对优势可能变成劣势。一般来说，这个假设对我们考虑的随机过程都是成立的。

给定上述两个假设，式（4－31）中函数 $G(x)$ 的解必定是单调增加的。为说明这一点，注意到右边的最大化算子中的第二项包括两个部分。第一部分正好是假设 1 的表达式：

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

$$\pi(x)-\Omega(x)+(1+\rho)^{-1}\int\Omega(x')\mathrm{d}\Phi(x'\mid x)$$

它已经直接被假设为单增的。第二部分，即积分部分为

$$(1+\rho)^{-1}\int G(x')\mathrm{d}\Phi(x'\mid x)$$

如果 $G(x)$ 是单增的，则它也是单增的。事实上，由假设 2，$\Phi(x'\mid x)$ 是关于 x 的单增函数以及 $G(x)$ 的单增性可知，第二部分是单调增加的。因此由一个单增函数出发，经过式（4-6）右边的算子作用后仍得到一个单增函数。故这个迭代的不动点，即方程式（4-31）的解也是单增的。[7]

我们已经证明了式（4-31）中右边的第二项是单增的，因而存在惟一的点 x^*，当且仅当 $x>x^*$ 时，它大于零。因此对 $x>x^*$，继续是最优选择；而对 $x<x^*$，停止是最优选择。

当时间连续时，我们必须用 $\rho\mathrm{d}t$ 和 $\pi(x)\mathrm{d}t$ 分别代替 ρ 和 $\pi(x)$。假设 $x'=x+\mathrm{d}x$，且 x 服从几何布朗运动 $\mathrm{d}x=\mu x\mathrm{d}t+\sigma x\mathrm{d}z$。用伊藤引理将 130
$\Omega(x')$展开并化简，这时假设 1 变成要求

$$\pi(x)-\rho\Omega(x)+\mu x\Omega'(x)+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\Omega''(x)$$

对 x 单调。

3．平滑粘贴

这里我们考虑有限时间期界上的最优停止问题，其中状态变量服从伊藤过程。我们较正式地来论证价值匹配式（4-14）和平滑粘贴条件式（4-15）决定了分割继续区域和停止区域的自由边界。

在时间区间 $\mathrm{d}t$ 上，贝尔曼方程式（4-6）为

$$F(x,t)=\max\{\Omega(x),\pi(x,t)\mathrm{d}t+(1-\rho\mathrm{d}t)F(x,t)+E[\mathrm{d}F]\}$$

如果右边大括号中的第一项较大，则停止是最优选择；反之，继续为最优选择。

固定一个特殊的 t，为确定起见，假设在我们考虑的问题中连续区域为 $\{x>x^*(t)\}$，停止区域为 $\{x<x^*(t)\}$。如果条件式（4-14）不成立，即 $F(x^*(t),t)<\Omega(x^*(t),t)$。由连续性知，在 $x^*(t)$ 右边一个很小的区间内，$F(x,t)<\Omega(x,t)$。而贝尔曼方程中右边第二项与 $F(x,t)$ 仅相差一些关于 $\mathrm{d}t$ 的项，因而对充分小的 $\mathrm{d}t$，我们可使右边第二项在这一范围内小于 $\Omega(x,t)$，于是立即停止就是最优选择，这与 $\{x>x^*(t)\}$ 作为临界值的定义相矛盾。下面假定 $F(x^*(t),t)<\Omega(x^*(t),t)$，由

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

连续性知，在 $x^*(t)$ 左边的一个很小的区间内，$F(x, t) < \Omega(x, t)$，因此，对于充分小的 dt，继续产生的价值要大于 $\Omega(x, t)$，因此，停止就不是最优的。这与 $x^*(t)$ 的定义相矛盾。

对平滑粘贴条件的证明也可用反证法。我们利用图 4—2 帮助说明这一点。同样我们假设 $\{x > x^*(t)\}$ 为继续区域，$\{x < x^*(t)\}$ 为停止区域。如果函数 $F(x, t)$ 和 $\Omega(x, t)$ 在 $x^*(t)$ 处不相切，则它们一定在某一弯折处相等。这个弯折点不可能是如图 4—2（a）中的向上弯折点，否则由 $\Omega(x, t)$的连续性，在 $x^*(t)$ 右边的一个小领域内，$\Omega(x, t) > F(x, t)$，对这样的 x，终止而不是继续将是最优条件，这与 $x^*(t)$作为临界点的定义相矛盾。下面考虑形如图 4—2（b）中的向下弯折点。我们证明 $x^*(t)$
131 不会是两种选择间的无差异点；在区间 Δt 上，继续是较好的选择。直观的想法是等待一个稍长一些的时间，我们可以观察 x 的下一步变化，从而在弯折点的两端选择一个较好的点。这两个选择的平均效果也要好于选择弯折点本身。这个平均效果即使贴现，也要优于选择弯折点本身的效果（因为选择是发生在 Δt 时间之后，所以应该贴现到相同的时间）。这个原因是布朗运动的增量与 $\sqrt{\Delta t}$ 成比例，因而它对价值的影响也与 $\sqrt{\Delta t}$ 成比例，而贴现的影响是和 Δt 成比例的。当 Δt 很小时，前者的效果相对较大（因 $\sqrt{\Delta t} > \Delta t$）。这个论证需要一些详细的代数推导。

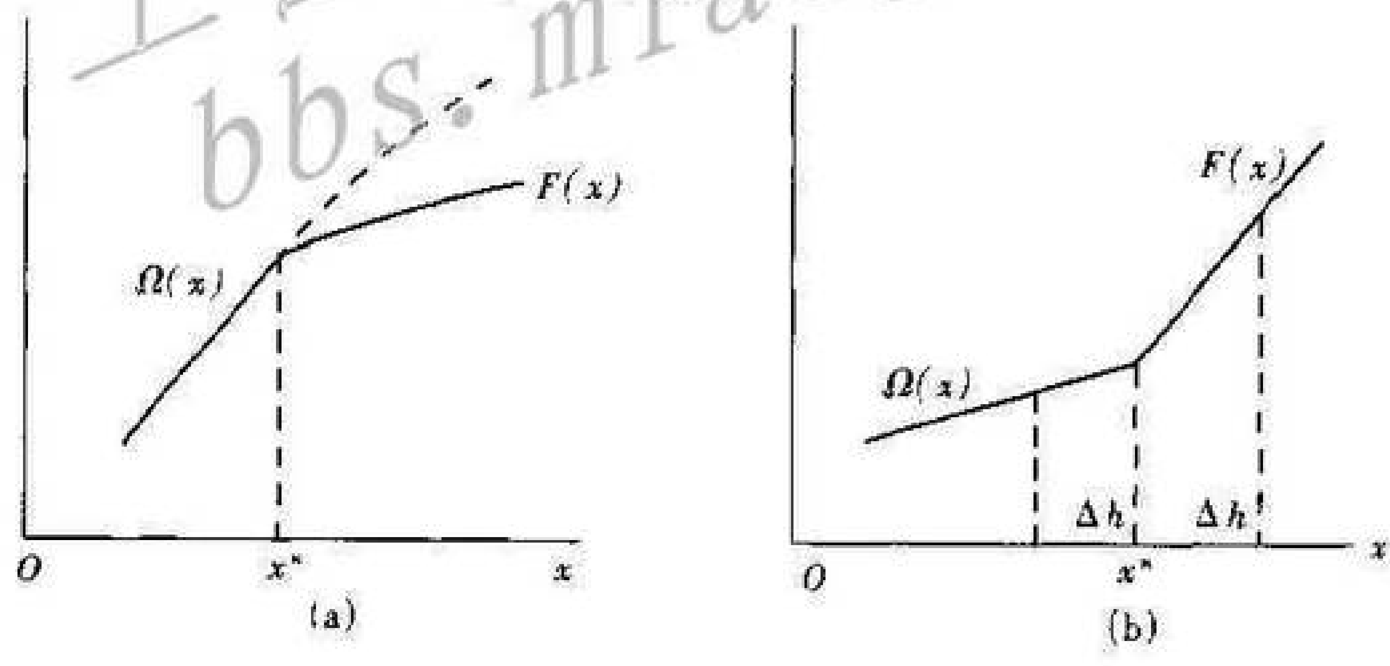


图 4—2　平滑粘贴的论证

如第 3 章所讲，过程 x 可看成随机过程，其跃度为 $\Delta h = b(x, t)\sqrt{\Delta t}$，发生向上跳跃与向下跳跃的相应概率为

$$p=\frac{1}{2}\left[\frac{1+a(x,t)\sqrt{\Delta t}}{b(x,t)}\right]$$
$$q=\frac{1}{2}\left[\frac{1-a(x,t)\sqrt{\Delta t}}{b(x,t)}\right]$$

（在第3章中，扩散过程的漂移系数 α 和扩散系数 σ 均为常数，这里是更一般的形式：函数 $a(x, t)$ 和 $b(x, t)$。）

考虑另一种决策：在时间 Δt 内继续，并且下一步如果 x 向上，则仍然"继续"；如果 x 向下，则停止且取得停止回报。用适当的概率加权（即取期望）并贴现后得

$$\pi(x^*(t),t)\Delta t+(1+\rho\Delta t)^{-1}[pF(x^*(t)+\Delta h,$$
$$t+\Delta t)+q\Omega(x^*(t)-\Delta h,t+\Delta T)]$$

在 $(x^*(t), t)$ 处将上式展开成泰勒序列，利用上面的价值匹配条件，并注意到 Δt 的阶为 $(\Delta h)^2$，展开式的头两项为 132

$$F(x^*(t),t)+\frac{1}{2}[F_x(x^*(t),t)-\Omega_x(x^*(t),t)]\Delta h$$

如果函数在向下弯折点处相同（见图4—2(b)），则在 $x^*(t)$ 处 $F_x>\Omega_x$，故上式第二项为正。因此，这种策略优于在 $x^*(t)$ 处采取继续或终止的价值函数的共同值。而根据临界点的定义，在这一点采取两种策略是无区别的，故与临界点的定义矛盾。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

【本章注释】

[1] 在技术术语中，最大化是一个凸函数，因此，由詹森不等式，式(4-2)中相互独立的最大化的均值大于相应均值的最大值。

[2] 一般情况下，预期的符号是非常明确的。然而，为了使得在时刻 t 的信息包括在该时刻的状态及控制更清楚，一旦需要，我们将它正式地描述为

$$E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]=\int F_{t+1}(x_{t+1})\mathrm{d}\Phi_t(x_{t+1}|x_t,u_t)$$

式中，积分范围为 x_{t+1} 的分布区间，即 $\Phi_t(x_{t+1}|x_t, u_t)$ 存在的范围。

[3] 在现实中，由于通货膨胀，即使是政府债券也有一定的风险。我们这里完全忽略了它。关于确定利率期限结构的更完整的一般均衡模型，参见考克斯、英格索尔和罗斯（Cox, Ingersoll and Ross, 1985）的论述。

[4] 关于资本资产定价模型的更多内容，参见任何一本金融经济学的标

准教材；布雷利和迈尔斯（Brealey and Myers，1992）的书是相对基础的一本，黄和莱茨伯格（Huang and Litzenberger，1990）的书是较高级的一本。

[5] 在严格意义上，即使在这一很短的时间区间内，连续时间下 π（x，t）也可以变化，而且其演化是随机的。然而，由这种考虑所引起的差异的数量级为（dt）^{2}，我们可以忽略它。

[6] 在量子电力学中，该结论证明具有巨大的操作意义。事实上，它隐含于费曼（Feynman，1949）关于一个粒子在所有可能路径上加总的概率的表述技巧中。费曼的表述是在动态规划与伊藤引理被发现之前而发展起来的，因此费曼的方法是一项令人惊奇的成果。由于因变量（概率的振幅）在量子电力学中被复杂定价，与动态规划和或有债权定价方法相类似的方法不可能推广到超过数学形式的程度。如果真是这样，那么，除了其在物理学上的贡献外，费曼也可能被认为是金融经济学的鼻祖。

[7] 为了在技术上更精确，该算子接近于非减函数的凸锥体，因而在该算子空间有一不动点，这也是整个函数空间上的不动点。然而，在附录 1 我们已经证明，后一不动点是惟一的。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

第Ⅲ篇

企业决策

上善若水股票论坛
bbs.miaogu.com

上善若水股票论坛
bbs.miaogu.com

135

第5章　投资机会与投资时机

上善若水股票论坛 www.shansjiaogu.com

在数学预备知识之后，我们现在可以回到对不确定条件下的投资决策的分析上来。本书中我们关心的主要是拥有两个非常重要特征的投资支出。(1) 开支至少是部分不可逆的；换句话说，沉没成本不可能被恢复。(2) 这些投资可能推迟，因此企业在调拨资源之前，有等待关于价格、成本及其他市场条件的新信息的机会。

正如第2章中的简单例子所表明的，推迟某种不可逆投资支出的能力可能会深深地影响到投资决策。特别地，它使商学院里普遍讲授给学生的简单的净现值规则（当项目预期现金流的现值至少与其成本一样大时投资于该项目）失效。这种规则是错误的，因为它忽略了现在就作出决定时的机会成本，因而放弃了等待新信息的机会。

正如我们在第2章所看到的，机会成本必须作为一部分包括在投资的总成本中。在本章及后面几章中，我们将在更一般的且更详细的水平上考察这种机会成本及其对投资的意义。

在本章，我们将提出并详细分析不可逆投资的一个最基本的连续时间模型。这个模型是由麦克唐纳和西格尔（McDonald and Siegel，1986）最先发
136 展出来的，该模型中，企业必须决定何时投资于单一项目。投资成本 I 是已知且固定的，但项目价值 V 服从几何布朗运动。简单的净现值规则是只要 $V>I$ 就投资，但正如麦克唐纳和西格尔所证明的，这是不正确的。因为 V 的未来值是未知的，现在就投资有机会成本。因此，最优投资规则是当 V 至少与超过 I 的某一临界值 V^* 一样大时才投资。正如我们即将看到的，对合理的参数值，这一临界值可能会是 I 的2～3倍。因此，简单的NPV规则就不仅仅是错误的，而且错误得非常严重。

在更详细地描述基本模型后，我们将说明如何能通过动态规划找到最优投资规则（即临界值 V^*）。然而，产生的问题是贴现率的选择。如果资本市场是“完全的”（在某种意义上这将被明确），投资问题可能被看做是期权定价问题，并利用或有债权分析技术来求解。我们将以这种方式重新解决最优投资问题，然后考察企业投资期权的特征及其对关键参数的依赖。最后，我们将通过考虑项目价值 V 的另一种随机过程来扩展这个模型。特别地，我们将寻找并刻画适用于 V 服从均值回归过程及服从布朗运动/泊松跳跃的混合过程中的最优投资规则的特征。

5.1 基本模型

我们从麦克唐纳和西格尔（McDonald and Siegel，1986）首先研究出的一个模型出发。他们考虑了下述问题，在哪一点支付沉没成本 I 以获得价值为 V 的项目是最优的？给定 V 并按照下面的几何布朗运动变化：

$$dV=\alpha V dt+\sigma V dz \tag{5-1}$$

式中，dz 为维纳过程的增量。式（5-1）隐含着项目的当前价值是已知的，但是未来价值是对数正态分布，其方差随着时间期界线性增长；方程的严格形式见第3.3.1小节。这样，尽管随着时间推移企业会有新信息（企业发现

V 在变化)，项目的未来值也一直是不确定的。

很清楚，式（5-1）是大多数实际项目的抽象。例如，假定项目是拥有一定生产能力的虚拟产品的工厂。如果可变成本为正，并且当产出价格低于可变成本时，经营者拥有临时关闭工厂或完全放弃工厂的期权，V 将不再服从几何布朗运动，即使虚拟产品的价格服从这种分布。（在第6章和第7章中，我们将研究出一些模型，其中产出价格服从几何布朗运动，而项目可以临时性关闭或放弃。）如果可变成本为正，经理没有关闭工厂的期权(也许是由于管制限制)，V 可能会变为负值，这将再次与对数正态分布的假定相矛盾。此外，有人可能认为，竞争性产品市场将防止价格过度地偏离产业范围的长期边际成本，或者价格的那种随机变化可能不太频繁但非常大，因此，V 将服从均值回归或跳跃过程。为了提供对基本观点和技术的最简单介绍，我们暂时忽略这些可能性。在第5.1节，我们考虑外生性特殊均值回归，并在第8章和第9章中考虑产业均衡。 137

注意到企业的投资机会等同于永久性看涨期权——以预先指定的价格购买股票的权利而不是义务。这样，投资决策等同于决定何时执行这一期权。因此，投资决策可以看做是期权定价问题（正如我们在第2章中所见到的简单例子）。[1]另外，它还可以被看做是动态规划问题。我们以这两种方式推导出最优投资规则，首先利用动态规划，然后利用期权定价（或有债权）方法。这允许我们比较这两种方法及每种方法所必须的假定。最后我们考察解的特征。

最后，将以 $F(V)$ 表示投资机会的价值（即投资期权的价值）。我们想找到使这个值最大化的规则。由于在时刻 t 来自投资的回报为 $V_t - I$，我们希望最大化其预期现值：

$$F(V)=\max E[(V_T - I)e^{-\rho T}] \tag{5-2}$$

式中，E 为预期；T 为作出投资的（未知的）未来时间；ρ 为贴现率；最大化受到关于 V 的方程式（5-1）的约束。为使这一问题有意义，我们也必须假定 $\alpha<\rho$；否则，选择一个较大的 T，式（5-1）中的积分可能会无穷大。因此，等待更长时间总是更好的政策，而最优解则不存在。我们令 δ 表示 $\rho-\alpha$ 的差异，这样我们假定 $\delta>0$。 138

5.1.1 确定性下的情形

尽管我们更多地关注不确定性影响投资决策的方式，但是首先考察不存

在不确定性的情形（即式（5－1）中的 σ 为 0）是有用的。正如我们将看到的，等待仍然是有价值的。

如果 $\sigma=0$，$V(t)=V_0e^{\alpha t}$，这里 $V_0=V(0)$。这样，给定当前价值 V，假定我们在未来一定任意时间 T 投资，则投资机会的价值为

$$F(V)=(Ve^{\alpha T}-I)e^{-\rho T} \tag{5-3}$$

假定 $\alpha\leqslant 0$，那么 $V(t)$将保持为常数或随着时间下降，显然，如果 $V>I$，立即投资是最优的，否则永不投资。因此，$F(V)=\max[V-I, 0]$。

如果 $0<\alpha<\rho$ 会怎样？即使现在 $V<I$，也会 $F(V)>0$，因为最终 V 将超过 I。而且，即使 V 现在超过了 I，等待而不是现在投资也是更好的。为弄清这一点，最大化方程式（5－3）中关于 T 的 $F(V)$，一阶条件为

$$\frac{dF(V)}{dT}=-(\rho-\alpha)Ve^{-(\rho-\alpha)T}+\rho Ie^{-\rho T}=0$$

它隐含着[2]

$$T^*=\max\left\{\frac{1}{\alpha}\log\left[\frac{\rho I}{(\rho-\alpha)V}\right],0\right\} \tag{5-4}$$

注意，如果 V 大于 I 并不是太多，我们会有 $T^*>0$。在这种情形下推迟投资的原因是，在现值方面，投资的成本通过因子 $e^{-\rho t}$ 而减少，而回报则以一个较小的因子 $e^{-(\rho-\alpha)t}$ 而减少。

那么，V 等于什么值时立即投资是最优的？通过令 $T^*=0$，我们发现，如果 $V\geqslant V^*$，人们应当立即投资，这里

$$V^*=\frac{\rho}{\rho-\alpha}I>I \tag{5-5}$$

139 最后，通过将表达式（5－4）代入式（5－3），我们获得 $F(V)$如下的解：

$$F(V)=\begin{cases}\left(\dfrac{\alpha I}{\rho-\alpha}\right)\left[\dfrac{(\rho-\alpha)V}{\rho I}\right]^{\frac{\rho}{\alpha}}, & V\leqslant V^*\\ V-I, & V>V^*\end{cases} \tag{5-6}$$

图 5—1 显示了 $I=1$，$\rho=0.10$，$\alpha=0$，0.03 和 0.06 时的 $F(V)$。在每种情形下，$F(V)$ 与直线 $V-I$ 的切点位于临界值 $V^*=\frac{\rho I}{\rho-\alpha}$。注意，若 α 增加，$F(V)$ 也增长，临界值 V^*也增加。V 的增长创造了等待的价值，并提高了投资机会的价值。

上善若水股票论坛 bbs.miadgu.com

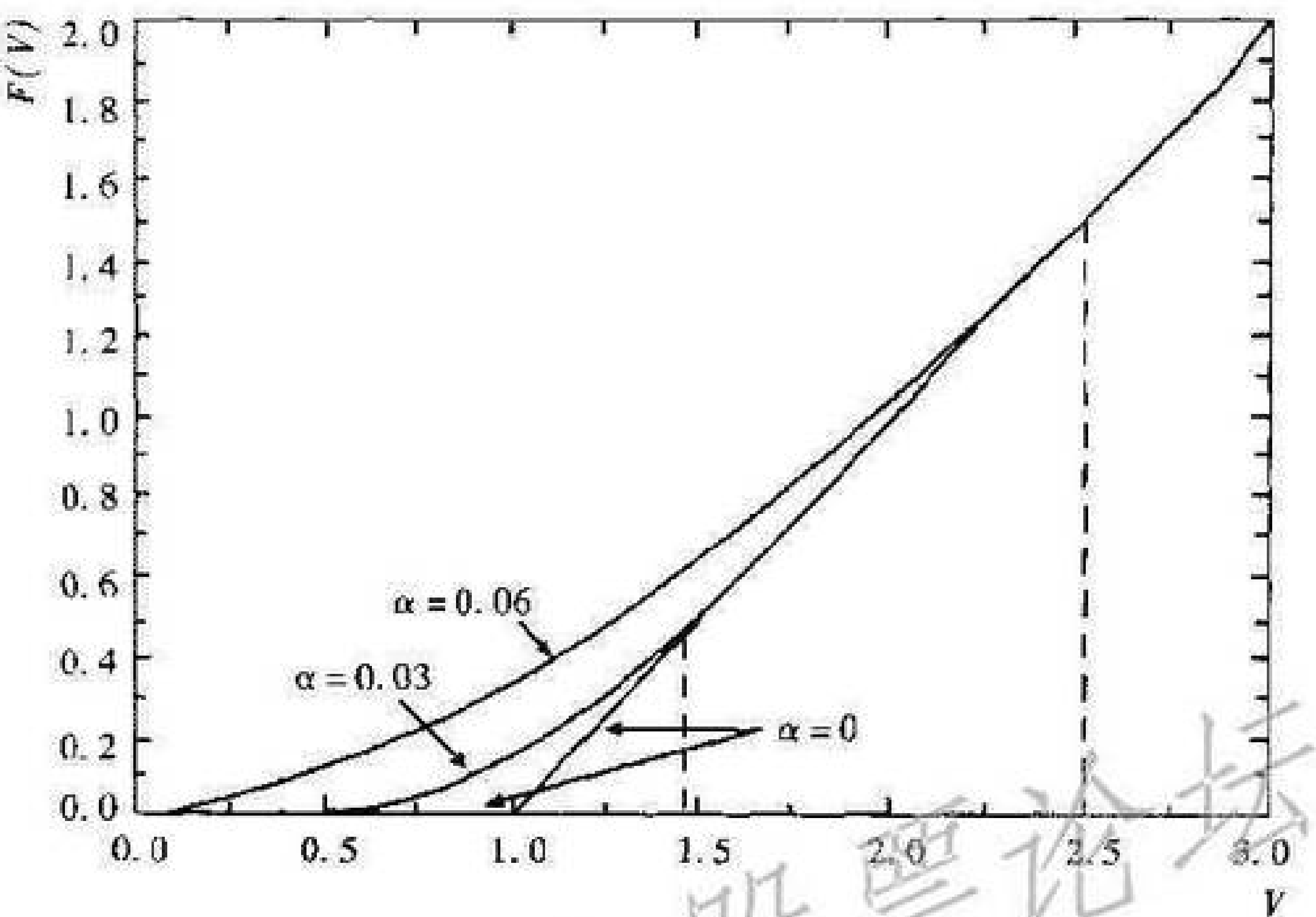


图 5—1　投资机会的价值，$F(V)$，$\sigma=0$，$\rho=0.1$

5.1.2　随机情形

我们现在转到 $\sigma>0$ 的一般情形。这一问题是确定获得资产价值 V 作为回报而投资于 I 的最优点。由于 V 是随机变化的，我们不能像前面那样确定时间 T。实际上，我们的投资规则将以临界值 V^* 的形式出现，一旦 $V\geqslant$ 140
V^*，投资就是最优的。正如我们将要看到的，一个较高的 σ 将导致一个较高的 V^*，也就是说，等待有更高的价值。然而，记住这一点非常重要：一般来说，增长（$\alpha>0$）和不确定性（$\sigma>0$）都能创造等待的价值，并因此影响投资时机。

在接下来的两节中，我们将沿袭第 4 章所介绍的技巧用两种方式来解决这个投资问题。首先将利用动态规划，然后将利用或有债权方法重新解同样的问题。这使我们能够仔细地比较这两种方法。

5.2　利用动态规划求解

在第 4 章中，我们有一个连续时间中的最优停止问题。因为投资机会

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

$F(V)$直到投资被实施的时刻 T 之前不会产生现金流，持有它的惟一回报是其资本增值。因此，正如我们在第 4 章所见到的，在连续时间段（V 的价值对投资来讲并不是最优的）的贝尔曼方程为：

$$\rho F\mathrm{d}t = E(\mathrm{d}F) \tag{5-7}$$

式（5-7）说明，在时间段 $\mathrm{d}t$，投资机会的预期总回报 $\rho F\mathrm{d}t$ 等于其资本的预期增值率。

我们利用伊藤引理来展开 $\mathrm{d}F$，我们用"′"表明导数，例如，$F' = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V}$，$F'' = \frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}V^2}$等。则

$$\mathrm{d}F = F'(V)\mathrm{d}V + \frac{1}{2}F''(V)(\mathrm{d}V)^2$$

将式（5-1）中的 $\mathrm{d}V$ 代入这一表达式，并注意 $E(\mathrm{d}z)=0$ 时，得到

$$E(\mathrm{d}F) = \alpha VF'(V)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\sigma^2V^2F''(V)\mathrm{d}t$$

那么贝尔曼方程（在除以 $\mathrm{d}t$ 后）变为

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2F''(V) + \alpha VF'(V) - \rho F = 0 \tag{5-8}$$

如果我们作出 $\alpha = \rho - \delta$ 这样的替换，分析结果并将它与利用或有债权所分析出的结果进行比较都将更容易。为保证最优的存在（由于早已在与确定性
141 相关的情形下所解释过的理由），我们假定 $\alpha < \rho$ 或 $\delta > 0$。在这种记号下，贝尔曼方程变成下面的 $F(V)$ 必须满足的微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2F''(V) + (\rho-\delta)VF'(V) - \rho F = 0 \tag{5-9}$$

此外，$F(V)$ 必须满足下面的边界条件：

$$F(0) = 0 \tag{5-10}$$

$$F(V^*) = V^* - I \tag{5-11}$$

$$F'(V^*) = 1 \tag{5-12}$$

条件式（5-10）来自于当 $V=0$ 时，$F(V)$ 将保持为 0 的观察（这是 V 的随机过程式（5-1）的隐含的意义）。因而当 $V=0$ 时，投资期权将是无价值的。另两个条件来自于对最优投资的考虑，V^* 是投资为最优时的价格，或者是第 4 章中所描述的连续区域的自由边界．则式（5-11）为价值匹配条件，它仅仅说明现在投资企业可获得 $V^* - I$ 的净回报。最后，条件式(5-12)为平滑粘贴条件，在第 4 章及其附录 3 曾经讨论过。如果 $F(V)$ 不

bbs.mizogu.com 上善若水股票论坛

是连续的，而且在临界执行点 V^* 不是平滑的，人们在不同点实施投资可能更好。

注意到式（5－9）是二阶微分方程，但必须满足三个边界条件。原因在于尽管第一个边界（$V=0$）的位置是已知的，而第二个边界的位置是未知的，换言之，"自由边界 V^*"必须成为解的一部分，那样则需要第三个条件。式（5－11）有另外一个有用的解释。将它写作 $V^*-F(V^*)=I$，当企业投资时，它获得价值为 V 的项目，但是放弃了投资机会或投资期权，其价值为 $F(V)$。这样获得价值减去机会成本的净收益为 $V-F(V)$。临界价值 V^* 位于净收益等于直接或有形投资成本 I 的那一点。同样地，我们可以将方程写成 $V^*=I+F(V^*)$，令项目的价值等于进行投资的所有成本（直接成本加上机会成本）。关于这一点我们在后面还将更详细地讨论。

为找到 $F(V)$，我们必须解式（5－9），约束条件为边界条件式（5－10）～式（5－12）。在这种情形下很容易找到解。我们可以推测某一函数形式，如果它是有效的就通过替代来确定真实解。我们首先描述并推导出这个解的一些特征，然后更详细地讨论它。 142

为满足边界条件式（5－10），解必须采用下列形式：

$$F(V)=AV^{\beta_1} \tag{5-13}$$

式中，A 为待定常数，$\beta_1>1$ 为已知常数，其数值取决于微分方程中的参数 σ，ρ 及 δ。

其余的边界条件式（5－11）和式（5－12）可用于解出其他的两个未知数——常数 A 和在该点投资为最优的临界值 V^*。将式（5－13）代入式（5－11）和式（5－12），并整理，我们发现

$$V^*=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}I \tag{5-14}$$

及

$$A=\frac{V^*-I}{(V^*)^{\beta_1}}=\frac{(\beta_1-1)^{\beta_1-1}}{(\beta_1)^{\beta_1}I^{\beta_1-1}} \tag{5-15}$$

式（5－13）～式（5－15）给出了投资机会的价值及最优投资规则，即临界值 V^*，在该点投资是最优的。我们在后面还将更详细地考察这个解的特征。现在最重要的一点是，由于 $\beta_1>1$，我们有 $\frac{\beta_1}{\beta_1-1}>1$ 且 $V^*>I$。因此，简单的 NPV 规则是错误的。不确定性和不可逆性使得虚拟产品在临界

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

值 V^* 与投资 I 之间有一个楔子。该楔子的大小等于因子$\frac{\beta_1}{\beta_1-1}$，在考察潜在参数实际值的数量级以及这一楔子对这些参数的变化的反应时，该因子变得重要起来。为做到这一点，我们必须更详细地考察式（5－13）的解。

5.2.1 基本二次型

由于二阶的齐次微分方程式（5－9）对因变量 F 及其导数是线性的，其一般解可以看做是任意两个独立解的线性组合。如果我们采用函数 AV^β，假定 β 为齐次方程的一个根，通过替代，我们发现它满足方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)+(\rho-\delta)\beta-\rho=0 \tag{5-16}$$

方程的两个根为

$$\beta_1=\frac{1}{2}-\frac{\rho-\delta}{\sigma^2}+\sqrt{\left(\frac{\rho-\delta}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2\rho}{\sigma^2}}>1$$

及

148

$$\beta_2=\frac{1}{2}-\frac{\rho-\delta}{\sigma^2}-\sqrt{\left(\frac{\rho-\delta}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2\rho}{\sigma^2}}<0$$

那么式（5－9）的一般解可以写为

$$F(V)=A_1V^{\beta_1}+A_2V^{\beta_2}$$

式中，A_1 与 A_2 为待定常数。在我们的问题中，边界条件式（5－10）隐含着$A_2=0$，因而只剩下式（5－13）的解。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

为回答关于乘数$\frac{\beta_1}{\beta_1-1}$的经济问题，我们必须更详细地考察齐次方程式（5－16）。由于这一方程或与它非常接近的相似方程将几乎出现在每一章，在开始时建立标准的术语并获得一般性的结论是非常有帮助的。

一般地，我们将用 β 表示方程中的变量，而用 Q 表示整个二次表达式（左边）。这样 Q 是变量 β 的函数，也就是参数 σ，ρ 及 δ 的函数。我们将不说明这种明确的依赖性，除非这样做很重要。

尽管二次式的根是以清楚的代数形式出现的，如果能从几何上说明它是很有帮助的。图 5—2 显示了 Q 作为 β 的函数。$Q(\beta)$ 中 β_2 的系数为正，因此，当 $\beta\to\pm\infty$时，图像是趋于∞的向上倾斜的抛物线。而且，$Q(1)=-\delta<0$（记住我们假定 $\delta>0$）且 $Q(0)=-\rho<0$，因而图像与横轴相交于 1 右边的一个点及 0 左边的另一个点。也就是，一个根为 $\beta_1>1$；另一个根

为 $\beta_2<0$。

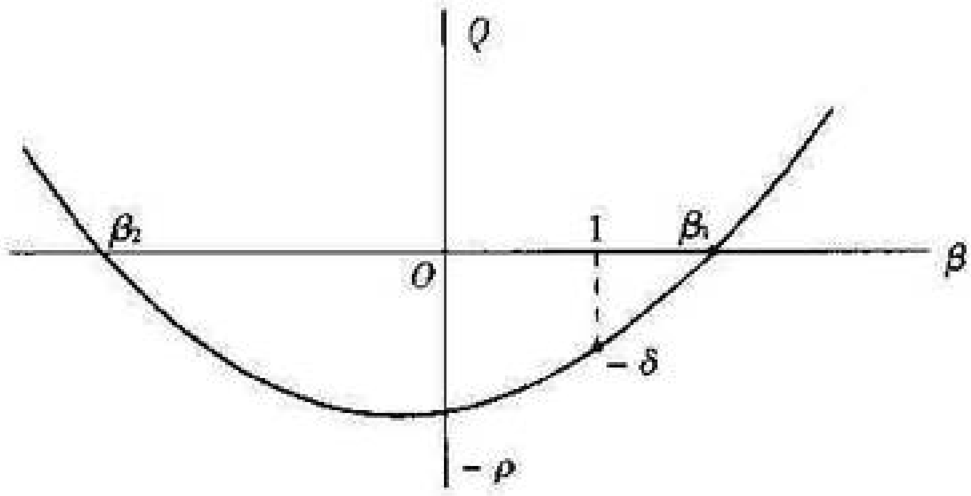


图 5—2 基本二次型

我们集中讨论正根 β_1。如果参数（如 σ）变化时，它将如何变化？这可以由标准的静态比较来回答。对二次式进行全微分：

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta}\frac{\partial \beta_1}{\partial \sigma}+\frac{\partial Q}{\partial \sigma}=0$$ 144

这里所有导数都是关于 β_1 的。图 5—2 表明，在点 β_1，$\frac{\partial Q}{\partial \beta}>0$。当 $\beta_1>1$时，还有

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma}=\sigma\beta(\beta-1)>0$$

因而$\frac{\partial \beta_1}{\partial \sigma}<0$。换句话说，随着 σ 递增，β_1 递减，那么$\frac{\beta_1}{\beta_1-1}$递增。未来价值 V 的不确定性的数量越大，虚拟产品在 V^* 与 I 之间的楔子也越大，即在愿意作出不可逆的投资之前，企业所要求的超额回报也越高。

读者同样可以检验二次型的其他两个特征。(1) β_1 随 δ 的提高而提高，因此 δ 越高，意味着更小的楔子$\frac{\beta_1}{\beta_1-1}$。(2) β_1 随 ρ 的提高而降低，因此较高的 ρ 意味着更大的楔子。在第 5.4 节，我们还将更详细地讨论这些结论，并提供一些数值例子。

关于 β_1 的一些极限结果也能提供信息。我们简单地说明它们。利用代数公式，它们很容易得到证明。首先，当 $\sigma\to\infty$，我们有 $\beta_1\to 1$，且 $V^*\to\infty$，即如果 σ 是无限的，企业永远不投资。下面考虑当 $\sigma\to 0$ 时会发生什么。我们有

$$\text{如果 } \alpha>0,\ \text{则 } \beta_1\to\frac{\rho}{\rho-\delta}\ \text{且 } V^*\to\left(\frac{\rho}{\delta}\right)I$$

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

如果 $\alpha\leqslant 0$，则 $\beta_1\to\infty$ 且 $V^*\to I$

这些结论与我们在前面考察过的确定情形下的结论是一致的。

5.2.2 与新古典投资理论的联系

为进一步推进这种分析，假定项目本身是一家具有无限生存能力的工厂，其生产出的利润流为 πt，且服从下面的过程：

$$d\pi=\alpha\pi dt+\sigma\pi dz$$

那么 V 由下面的式子给出：

145 $$V_1=E\int_t^{\infty}\pi_s e^{-\rho(s-t)}ds=\frac{\pi_t}{\rho-\alpha}$$

并且 dV 由式(5－1)给出。典型的马歇尔(Marshallian)规则是只要 $V_t\geqslant I$，或者 $\pi_t\geqslant(\rho-\alpha)I$，就投资。然而，式(5－14)告诉我们，实际上企业是在

$$\pi_t\geqslant\pi^*=\frac{\beta}{\beta-1}(\rho-\alpha)I>(\rho-\alpha)I \tag{5-17}$$

时才投资。考察这一点的另一种途径是根据投资的乔根森（Jorgensonian）方法。[3]由 β_1 满足二次方程式（5－16），我们有

$$\frac{\beta_1}{\beta_1-1}(\rho-\alpha)=\rho+\frac{1}{2}\sigma^2\beta_1$$

这样，临界利润水平 π^* 可以写为

$$\pi^*=\left(\rho+\frac{1}{2}\sigma^2\beta_1\right)I>\rho I \tag{5-18}$$

由于我们已假定零折旧，ρI 是乔氏资本使用成本。乔氏法则是，当 $\pi_t=\rho I$ 时就投资。式（5－18）说明，当未来利润不确定时，临界的 π^* 必须超过这一资本的利用成本。

当不确定性不存在时，乔氏投资法则要求企业在 $\pi_t=\rho I$ 时投资，而不是 $\pi_t=(\rho-\alpha)I$ 时。如前所见，这可以看做最优时机规则。企业又必须选择 T 并使下面的式子最大化：

$$\max_T\left(\frac{\pi_0e^{\alpha T}}{\rho-\alpha}-I\right)e^{-\rho T}=\frac{\pi_0e^{-(\rho-\alpha)T}}{\rho-\alpha}-Ie^{-\rho T} \tag{5-19}$$

其解是在时机 T 投资，若

$$\pi_T=\pi_0e^{\alpha T}=\rho I \tag{5-20}$$

（读者可以证明，$\alpha>0$ 是这个最大化问题的二阶条件。）因此，即使没有不确定性，企业也将等待投资，因为等待允许延迟支付 I（及其贴现）。[4]正如

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

式（5－18）所证明的，在不确定性条件下，多了$\frac{1}{2}\sigma^2\beta_1$这一项，因而企业在投资之前必须等待更长时间。多出的这一项可以看做对新古典投资模型的修正。

5.2.3 与托宾 q 值的关系

146

托宾（Tobin，1969）引入了 q 值，将其定义为“现有资本品或它们的权益的价值”与“它们当前重置成本”之比。这已经成为传统投资理论的核心概念。如果这一比率超过了效用，企业可以通过提高其资本存量而增加其市场价值。因此，当企业的 q 值大于 1 时，我们将会看到企业投资；当企业的 q 值小于 1 时，企业不投资。而且，我们可以通过计算基于某一种产业内（或整个经济内）企业的平均市场价值与相应的资本平均重置成本的 q 值来进行汇总。那么，我们将发现投资开支的总水平与 q 值正相关。

关于 q 的测度及解释产生了许多问题。其中，重要的一个是，与运用于某一企业或产业的全部价值及资本存量中的平均成本 q 相反，影响投资的是边际 q，即运用于企业或产业的增加的投资计划中的 q。我们在第 11 章和第 12 章将更详细地阐述边际 q 这一概念。这里我们想强调一个不同的问题。正如所说明的，q 的分子是现存资产的市场价值，与投资决策相关的是下一个项目对企业价值有一定的影响。我们已经发现，为达到这一点，进行投资的成本必须从项目价值中减掉。因此，如果假定某一项目的价值为 V，期权价值为 $F(V)$，企业价值将提高 $V-F(V)$，而不是 V。相应地，q 将被定义为$\frac{V-F(V)}{I}$。因而调整投资的 q 值实际上将等于 1，正如我们在式（5－11）中所看到的，它定义了临界值 V^*。

然而，配置来自资本边际单位的企业市场价值的比例是困难的。部分原因在于，q 在某种程度上必须被不同地界定或至少是不同地测度，因为来自完全投资的收益的预期现值与其建造成本的比率有时有一定的差异。这对应于投资期权已经得到执行，而机会成本已消失的情形下利用已有资产的价值。在我们的讨论中，这表示将 q 定义为$\frac{V}{I}$。我们可用 q 的这种概念来解释修正的投资标准：调整投资的临界值 q^*，它由下面的式子给出：

$$q^*=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}>1 \qquad (5-21)$$

147 当 V 波动时，传统上测度的 q 大于 1 却没有引致投资的时间会有所延长。这给出了不可逆性对企业投资决策影响的另一种视角。

在第 11 章和第 12 章中，我们有机会讨论利用 q 的概念来研究投资的有关文献。有些文章采用了前面关于 q 的第一种定义，其他的则采用了第二种定义。因此，我们将不得不仔细地区分它们。我们把第一种（期权价值，并将 1 作为其上限）称为"企业价值"概念；第二种（忽略期权价值，并将 $\frac{\beta_1}{\beta_1-1}$ 作为临界水平）称为"适当的资产价值"。

5.3 或有债权分析的解

如果企业作出的投资是公共持有的，而且经理希望他们的决策反映股东的利益，他们应当努力最大化企业的市场价值。我们如何知道前面推导出的投资规则能否做到这一点？这种投资规则的一个问题是，它取决于一个任意的常数贴现率 ρ。还不清楚这一贴现率从哪里来，即使对它是否一直为常数也不是很清楚。正如我们在第 4 章所看到的，我们可以利用或有债权（期权定价）方法推导出一个简单修正的投资规则，它确实将最大化企业的市场价值。在本节中，我们详细地完成必须的步骤。

上学吧 bbs.mizogu.com 论坛

5.3.1 重新解释模型

利用或有债权分析要求一个重要假定：V 随机变化的范围必须在经济中已有资产的范围内。特别地，资本市场必须是充分"完善的"，因此，至少在原则上，人们可以发现一种资产或构造资产的一种动态投资组合（即持有随着资产价值变动连续调整的一种投资组合），其价格与 V 完全相关。这等于说，市场充分完善，企业决策不影响投资者现有的机会集。[5]

变化范围的假定对大多数商品是成立的，特别是在现货市场和期货市场
148 都交易的商品，而对制造品，价格与股票或投资组合的价值在一定程度上是相关的。然而，确实存在这种假定不成立的情形，例如，开发一种与任何现有产品都不相关的虚拟产品的项目，或者研究与开发风险投资，其结果可能很难预测。

在这里我们将假定变化范围是成立的，即原则上 V 的未来值的不确定

性可以由现有的资产来生成。在这种假定下，我们可以在不作出关于风险偏好或贴现率的任何假定下来决定最大化企业市场价值的投资规则。而且，利用或有债权分析可以更容易地解释这个解的某些特征。当然，如果变化范围不成立，动态规划仍然可以用于某一贴现率条件下企业预期收益流的现值的最大化。两种方法的关系，参见第4.3节中对此问题的更详细讨论。

我们根据第4.2节中所概括的或有债权定价理论，为了进一步巩固和澄清该理论，我们又重述了一些细节。令 x 表示一项资产或与 V 完全相关的某一资产动态组合的价格，并用 ρ_{xm} 表示 x 与市场组合的相关性。由于 x 与 V 完全相关，$\rho_{xm}=\rho_{Vm}$。我们假定该资产或组合不支付股利，因此，其全部回报来自于资产收益。那么 x 根据式（5-22）演化：

$$\mathrm{d}x=\mu x\mathrm{d}t+\sigma x\mathrm{d}z \tag{5-22}$$

式中，漂移率 μ 为持有该资产或资产组合的预期回报率。根据资本资产定价模型，μ 应反映出资产的系统（不可分散）风险。正如第4章所解释的，μ 将由下面的式子给出：

$$\mu=r+\phi\rho_{xm}\sigma$$

式中，r 为无风险利率；ϕ 为风险的市场价格。[6] 这样，μ 为投资者准备拥有该项目时所必须的经风险调整的预期回报率。我们假定 V 变化的预期百分比 α 小于经风险调整的回报 μ。（正如我们将要看到的，如果不是这样，企业将永不投资。无论当前 V 的水平怎样，企业等待并简单地保持其投资 149
期权都会有所改善。）我们将令 δ 表示 μ 与 α 之间的差异，即 $\delta=\mu-\alpha$。这样，我们假定 $\delta>0$，这与第5.2节中动态规划模式下的相应假定起着相同的作用。

参数 δ 在模型中起着重要作用。我们在第4章讨论了其作为隐含或显现股息时的作用，这里我们详细说明有关的评论。利用金融看涨期权的类推是有帮助的。如果 V 为一股普通股的价值，δ 将是股票的股息率。股票的预期总回报为 $\mu=\delta+\alpha$，即股息率加上资本收益的预期率。如果股息率 δ 为零，该股票的看涨期权将会被持有至到期日，而永远不会在到期前执行。理由是股票的全部回报被反映在其价格波动中，从而也被反映在看涨期权的价格波动中，因此，保持期权有活力是没有成本的。然而，如果股息率为正，保持期权有活力而不是执行它会存在机会成本。这一机会成本就是人们持有期权而不是股票所放弃的股息流。由于 δ 为百分比的股息率，股票价

格越高，股息流量越大。在某一充分高的股票价格上，放弃股息的机会成本足以变大到使执行期权有价值。

对我们的投资问题，μ 为已完成项目的预期回报率。它是资本市场所建立的均衡比率，并且包括适当的风险溢价。如果 $\delta>0$，项目的预期资本收益率小于 μ。因此，δ 为推迟项目建设而保持投资期权有活力的机会成本。如果 $\delta=0$，保持投资期权有活力不存在机会成本，人们将永远不投资，无论项目的 NPV 有多高。这就是我们为什么假定 $\delta>0$。另外，如果 δ 非常大，期权价值将变得非常小，因为等待的机会成本高。当 $\delta\to\infty$，期权的价值将趋于零；实际上，惟一的选择是要么现在投资，要么永不投资，标准的 NPV 规则再次生效。

参数 δ 可以用其他方式来解释。例如，它可以反映竞争者进入及其扩张生产能力的过程，（然而，在第 8 章中，我们将讨论把竞争者进入过程内生化的更完整模型，并发现最终的均衡不能通过简单地提高每家企业的 δ 来很好地描述。）或者它可以简单反映项目的现金流。如果项目有无限的生命力，则式（5-1）可以代表项目经营期间 V 的演化，而 δV 为项目产生
150 的现金流速率。由于我们假定 δ 为某一常数，这与未来现金流等于项目市场价值的某一固定比例是一致的。[7]

当模型的一些其他参数（如 σ）变化时，我们必须考察 δ 会发生什么变化。可以想像各种各样的可能性。通过更多地考虑整个资本市场，我们将始终假定无风险利率 r 是固定不变的，独立于任何一项资产（或一家企业甚至一种产业）的变化。风险 ϕ 的整体市场价格似乎将保持固定。现在假定 σ 提高，这提高了经风险调整的贴现率 μ。为保持市场对 x 的均衡，或者 α 或者 δ 必须改变。两种极端的情形在逻辑上是有可能的。首先，α 可以是关于 x 的基本事实，因此，δ 必须对 μ 的变化作出反应（例如，股息率可能取决于持有的商品量）。其次，δ 可能是基本的行为参数，x 的价格过程必须变化，因而 α 必须调整。第三种可能性是 α 和 δ 都参与调整。在我们的数值或静态比较中，我们将经常把 δ 看做是独立于 σ 的基本参数，但是将提到其他的可能性，这将使结论有实质性差别。

5.3.2 求解

让我们现在回到投资机会评价及最优投资规则上来。再一次，我们令 $F(V)$ 表示企业投资期权的价值。我们将以与第 2 章的两阶段例子或第 4.2

节中的一般理论大致相同的方法来决定 $F(V)$，即通过构建一个无风险的投资组合，决定其预期回报率，并令预期回报率等于无风险利率。

考虑下面的投资组合：持有投资期权，其价值为 $F(V)$，获得项目的 $n=F'(V)$ 单位的空头（或者等价地、资产或组合 x 与 V 完全相关）。这一组合的价值为 $\Phi=F-F'(V)V$。注意组合是动态的，当 V 改变时，$F'(V)$ 可能会在某一很短时间区间到下一个时间区间之间变化，因而投资组合的成分会改变。然而，在每一很短的时间区间 dt，我们保持 n 固定。 151

这一投资组合的空头要求在每一时间段获得 $\delta VF'(V)$ 美元的回报，否则不会有理性的投资者会持有交易的多头。我们在第 2.1.1 小节中讨论过这一点，并简单概括了其计算。在项目中持有多头的投资者所要求的经风险调整的回报为 μV，它等于资本收益 αV 加上股息流 δV。由于空头包含项目的 $F'(V)$ 单位，它需要支出 $\delta VF'(V)$。把这种支付考虑进来，在很短的时间区间 dt 内持有该投资组合的总回报为[8]

$$dF-F'(V)dV-\delta VF'(V)dt$$

为求出 dF 的表达式，利用伊藤引理

$$dF=F'(V)dV+\frac{1}{2}F''(V)(dV)^2$$

因而投资组合的总回报为

$$\frac{1}{2}F''(V)(dV)^2-\delta VF'(V)dt$$

由关于 dV 的式（5-1），我们知道 $(dV)^2=\sigma^2V^2dt$，因此投资组合的回报变为

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2F''(V)dt-\delta VF'(V)dt$$

注意到该回报是无风险的。因此为避免套利，它必须等于 $r\Phi dt=r[F-F'(V)V]dt$：

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2F''(V)dt-\delta VF'(V)dt=r[F-F'(V)V]dt$$

上式除以 dt，重新整理得到 $F(V)$ 必须满足的微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2F''(V)+(r-\delta)VF'(V)-rF=0 \tag{5-23}$$

我们发现，这个方程与利用动态规划所得的式（5-9）几乎一样。惟一

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

152 的差别在于无风险利率 r 代替了贴现率 ρ。相同的边界条件式（5－10）～式（5－12）在这里仍然适用，而且原理也与前面相同。这样 $F(V)$ 的解再次有这样的形式：

$$F(V)=AV^{\beta_1}$$

惟一的区别在于指数 β_1，二次方程中现在由 r 代替了 ρ，因此

$$\beta_1=\frac{1}{2}-\frac{r-\delta}{\sigma^2}+\sqrt{\left[\left(\frac{r-\delta}{\sigma^2}\right)-\frac{1}{2}\right]^2+\frac{2r}{\sigma^2}} \tag{5-24}$$

临界值 V^* 及常数 A 再次由式（5－14）和式（5－15）给出。

因此，在风险中性的假定下（即贴现率 ρ 等于无风险利率），我们的投资问题的或有债权解等同于动态规划解。[9]这样，无论生成是否存在，我们都可以求出投资问题的解；如果生成不存在，这个解受到一个假定的贴现率的约束。在任何一种情形下，这个解都会有相同的形式，而 σ 或 δ 的变化影响有可能是相同的。然而，有一点是值得注意的：在没有生成的条件下，没有理论能决定贴现率 ρ 的“正确”值（除非我们对投资者或经理的效用函数作出严格假定）。例如，资本资产定价模型可能不成立，因而它不能以常规方式计算风险调整的贴现率。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

5.4 最优投资规则的特征

让我们假定生成存在，并考察最优投资规则的特征及投资机会的价值，
153 正如由式（5－13）、式（5－14）、式（5－15）及式（5－24）所给出的，一些数值解有助于说明结论并显示它如何取决于各种参数的值。正如我们将要看到的，这些结论在数量上与标准的期权定价模型的结论相同。

除非特别指出，下面我们将设定投资成本 $I=1$，$r=0.04$，$\delta=0.04$，且 $\sigma=0.2$（年率）。（注意，我们无须知道 μ 或 α，而只须知道两者之间的差异 δ。）项目的回报率从一个项目到另一个项目之间差别很大，因此，$\delta=4\%$ 应被看做是合理的，但并不一定有代表性。至于 σ，平均来说，股票市场整体回报率的标准差一直为 20%。尽管这代表了一种已经多样化的资产组合，它还包括权益回报的杠杆效应，因而可能是平均资产的一种合理取值。

给定这些参数值，$\beta_1=2$，$V^*=2I=2$，$A=\frac{1}{4}$。这样，认为只要 V 至少与 I 一样大时企业就应当投资的简单 NPV 规则在总体上是错误的。对于参数值的这种合理设定，企业在投资之前，V 必须至少是 I 的 2 倍。对 $V\leqslant 2$，企业投资机会的价值为 $F(V)=\frac{1}{4}V^2$；对 $V>2$，$F(V)=V-1$（因为当 $V>2$ 时，企业执行其投资期权并获得净回报 $V-1$）。

图 5—3 显示了对上述参数来讲，在 $\sigma=0$，$\sigma=0.3$ 时作为 V 的函数的 $F(V)$。在每种情形下，$F(V)$ 与直线 $V-I$ 的切点给出了临界值 V^*。该图还显示出简单的 NPV 规则必须被修正为包括现在投资而不是等待的机会成本。这一机会成本实际上为 $F(V)$。当 $V<V^*$ 时，$F(V)>V-I$，从而 $V<I+F(V)$：项目的价值小于其全部成本——直接成本 I 加上机会成本 $F(V)$。（当 $\sigma=0$ 时，$V^*=I$，对于 $V\leqslant I$，$F(V)=0$。）

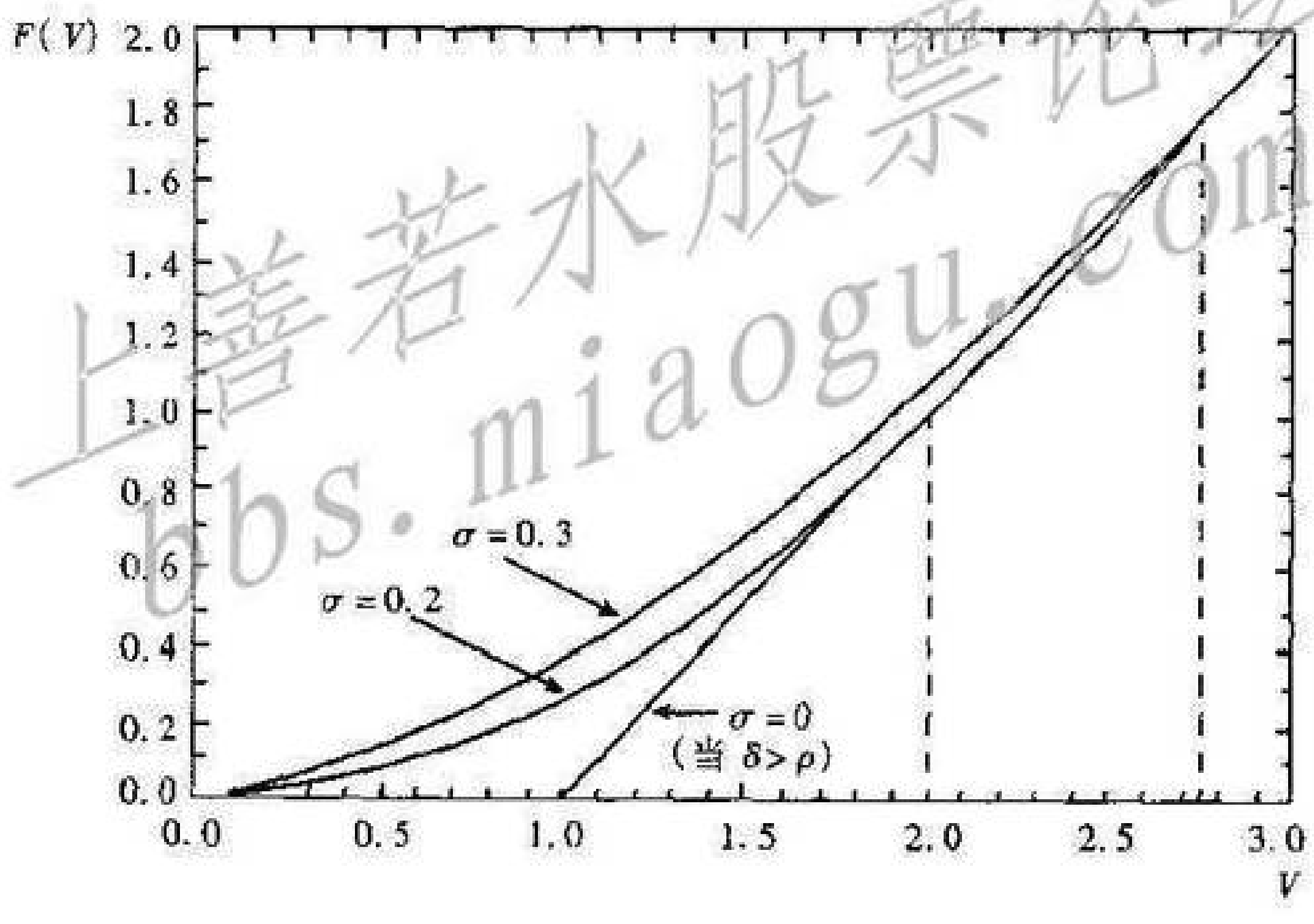
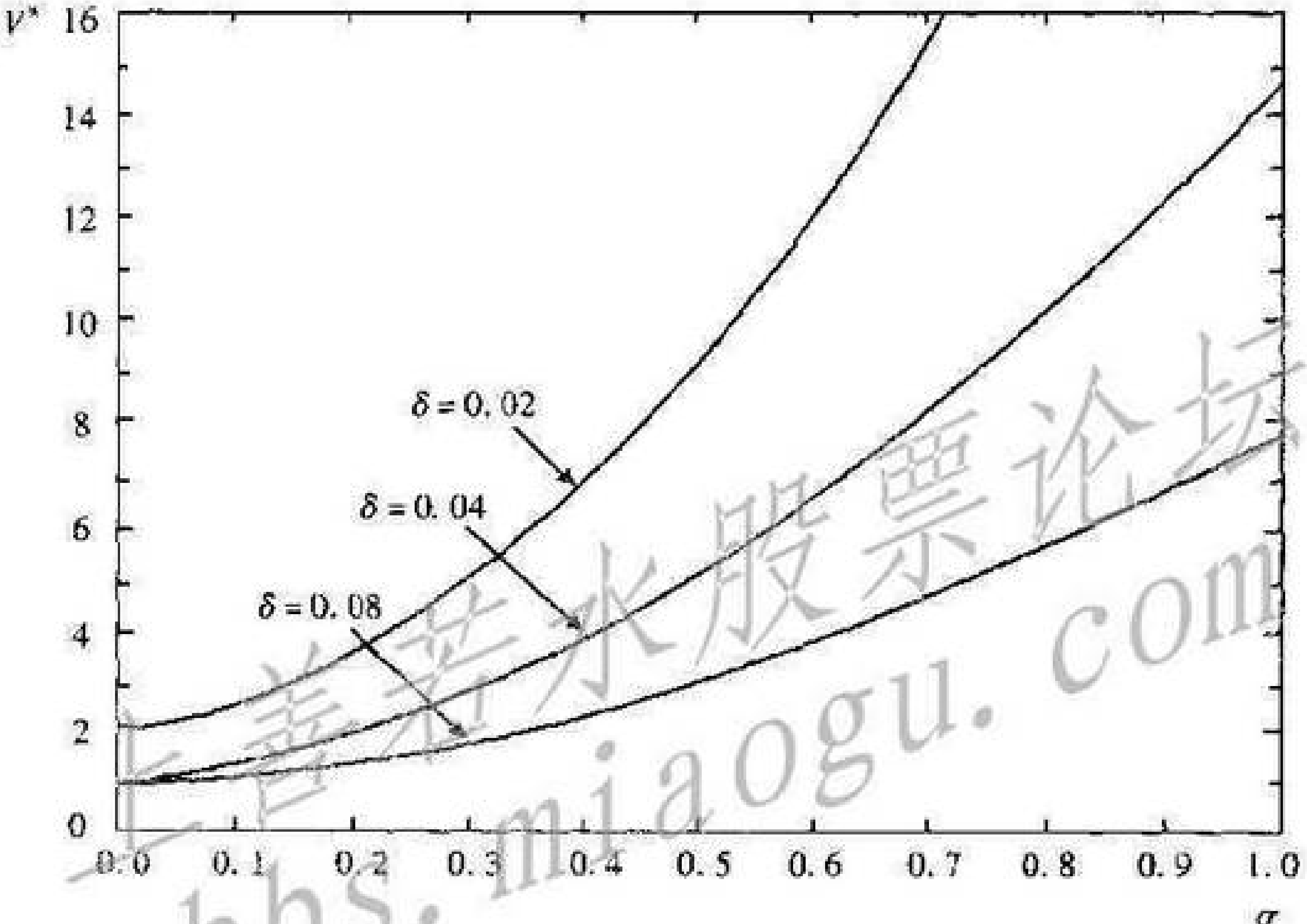


图 5—3 投资机会的价值，$F(V)$，$\sigma=0$，0.2 和 0.3

注意到当 σ 提高时，$F(V)$ 增加，临界值 V^* 也提高。这些更高的不确定性提高了企业投资机会的价值，但是（由于特定的原因）降低了企业将进行的实际投资的数量。结果是，当企业的市场或经济环境变得更不确定时，企业的市场价值可能会上升，即使企业确实减少了投资而且可能减少了产出也是如此。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

V^* 对 σ 的依赖也可以在图 5—4 中更直接地显示出来。观察到 V^* 随着 σ 的增加而大幅提高。这样，投资对项目价值的变动高度敏感，而不考虑投资者或经理的风险偏好，也不考虑 V 的风险与市场相关的程度。企业可能
154 是风险中性的，V 的随机变化可以是完全多样化的，而且 σ 的提高也将提高 V^*，因而会降低投资。[10]



上善若水股票论坛 bbs.mjiaogu.com

图 5—4　作为 σ 的函数的临界价值 V^*

图 5—5 和图 5—6 显示了 $F(V)$ 和 V^* 如何取决于 δ。观察到 δ 由 0.04 增加到 0.08 导致 $F(V)$ 下降，从而临界值 V^* 下降。（如图 5—6 所示，在极限条件下，对 $V<I$ 且 $V^* \to I$，当 $\delta \to \infty$ 时，$F(V) \to 0$。）理由是 δ 变得更大（除 α 外其他一切不变），V 的预期增长率下降，因此投资期权价值的预期折旧及获得的 V 下降。实际上，等待而不是现在投资变得更昂贵。为证明这一点，考虑对公寓建筑物的投资，这里 δV 为租金收入的净流量。该建筑物的总回报率，必须等于风险调整的市场利率，它包含两个成分——这种收入流和预期的资本收益率。因此，收入流相对于建筑物的总回
155 报越大，人们通过持有该建筑物的投资期权而不是拥有该建筑物自身所要放弃的就越多。

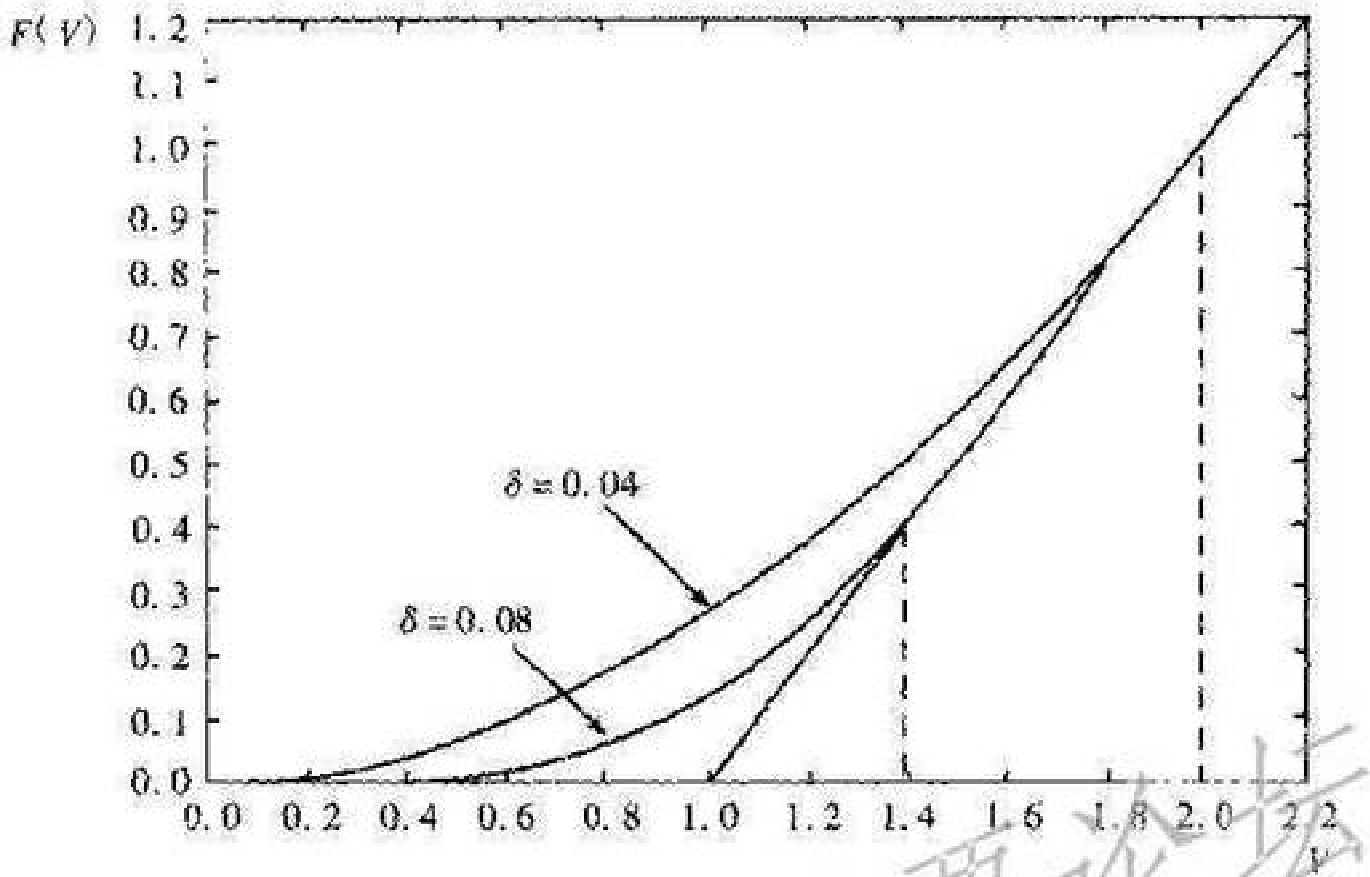
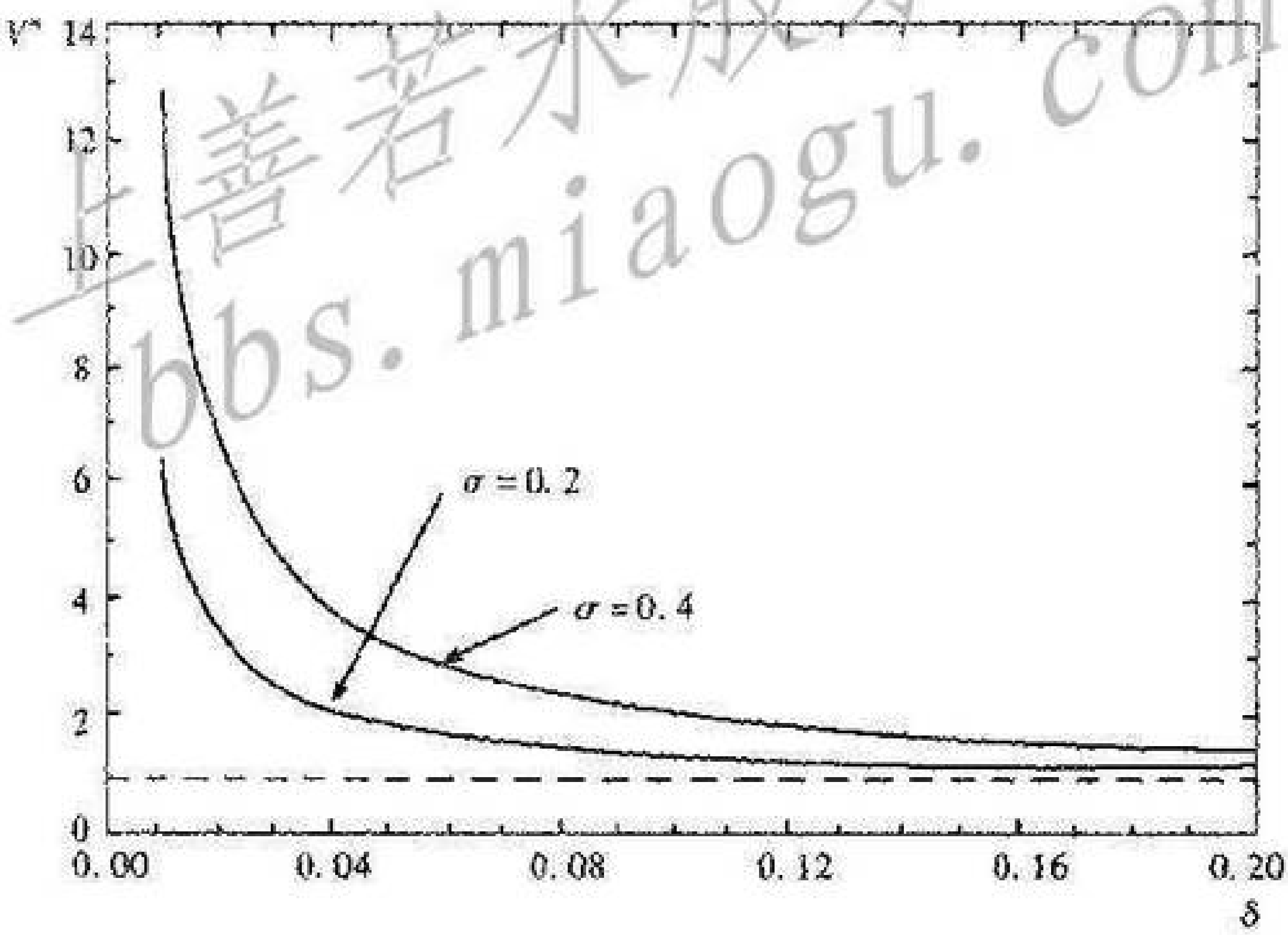


图5—5 投资机会的价值，F(V)，δ=0.04和0.08



上善若水股票论坛
bbs.miaogu.com

图5—6 作为δ的函数的临界价值V^*

我们已经把σ和δ看做独立参数。实际上如果允许δ随着σ的改变而调整，则σ每单位的增长要求δ有$\phi\rho_{xm}$单位的增长，因为

$$\delta = \mu - \alpha = r + \phi\sigma\rho_{xm} - \alpha$$

读者现在可以指定这些参数的值，并且可以将前面的两种计算结合起来以获得这种情形下 σ 的变化效应。

如果无风险利率 r 提高，则 $F(V)$ 提高，因而 V^* 提高。理由是未来时刻 T 所作出的投资开支 I 的现值为 Ie^{-rT}，但是作为该开支的回报，人们获得的项目现值为 $Ve^{-\delta T}$。因此，若 δ 固定，r 的提高会降低投资成本的现值，但是不会降低其回报。然而，尽管 r 的上升提高了企业投资期权的价值，它还会使这些期
156 权得到更少的执行。因此，较高的(实际)利率会减少投资，但其原因却与标准模型中的原因不同。在标准模型中，利率的提高通过提高资本成本而降低了投资；在这个模型中，它提高了投资期权的价值，因而提高了现在就投资的机会成本。(图 5—7 显示了 δ 等于 0.04 和 0.08 时 V^* 对 r 的依赖。)

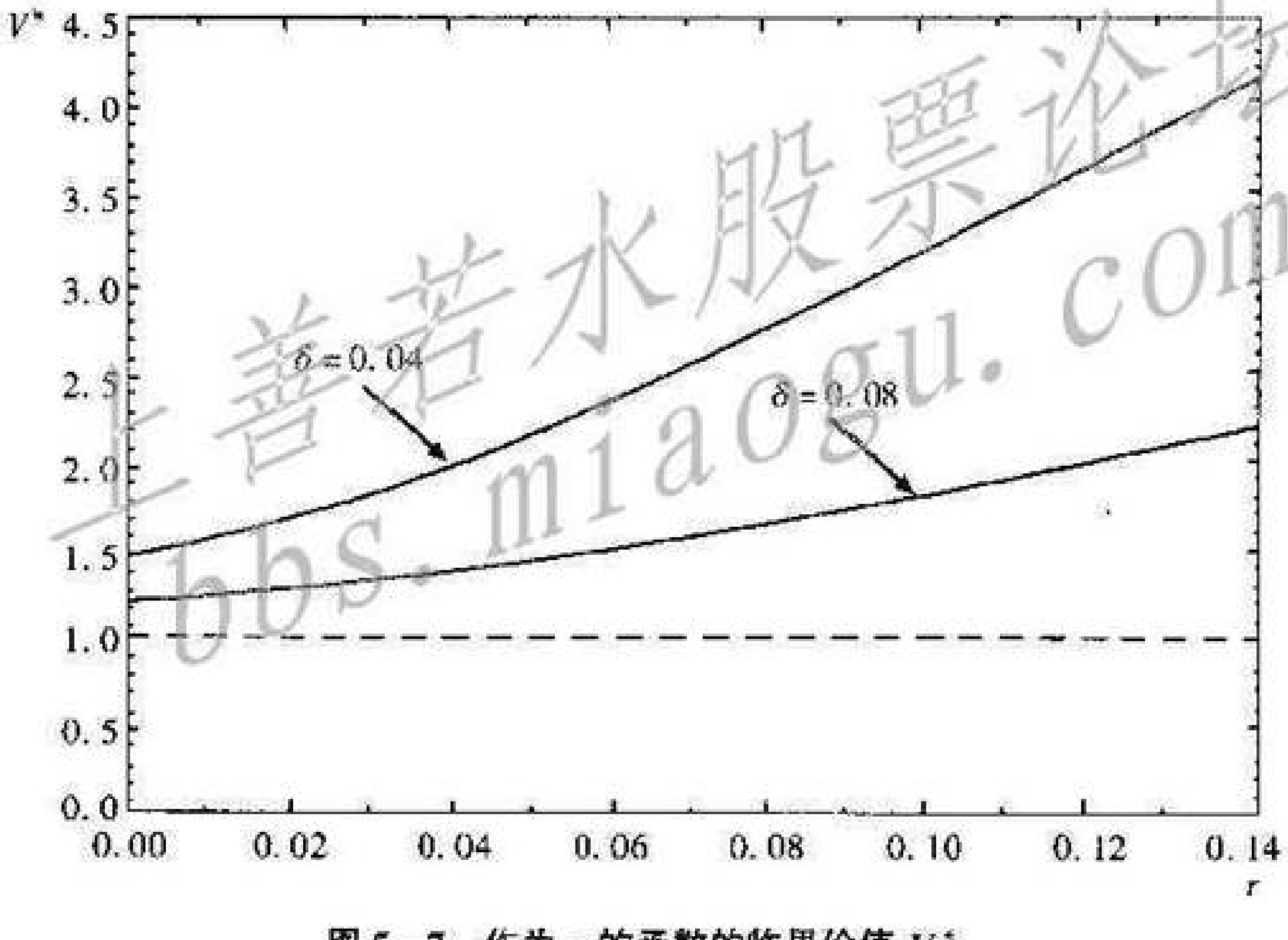


图 5—7 作为 r 的函数的临界价值 V^*

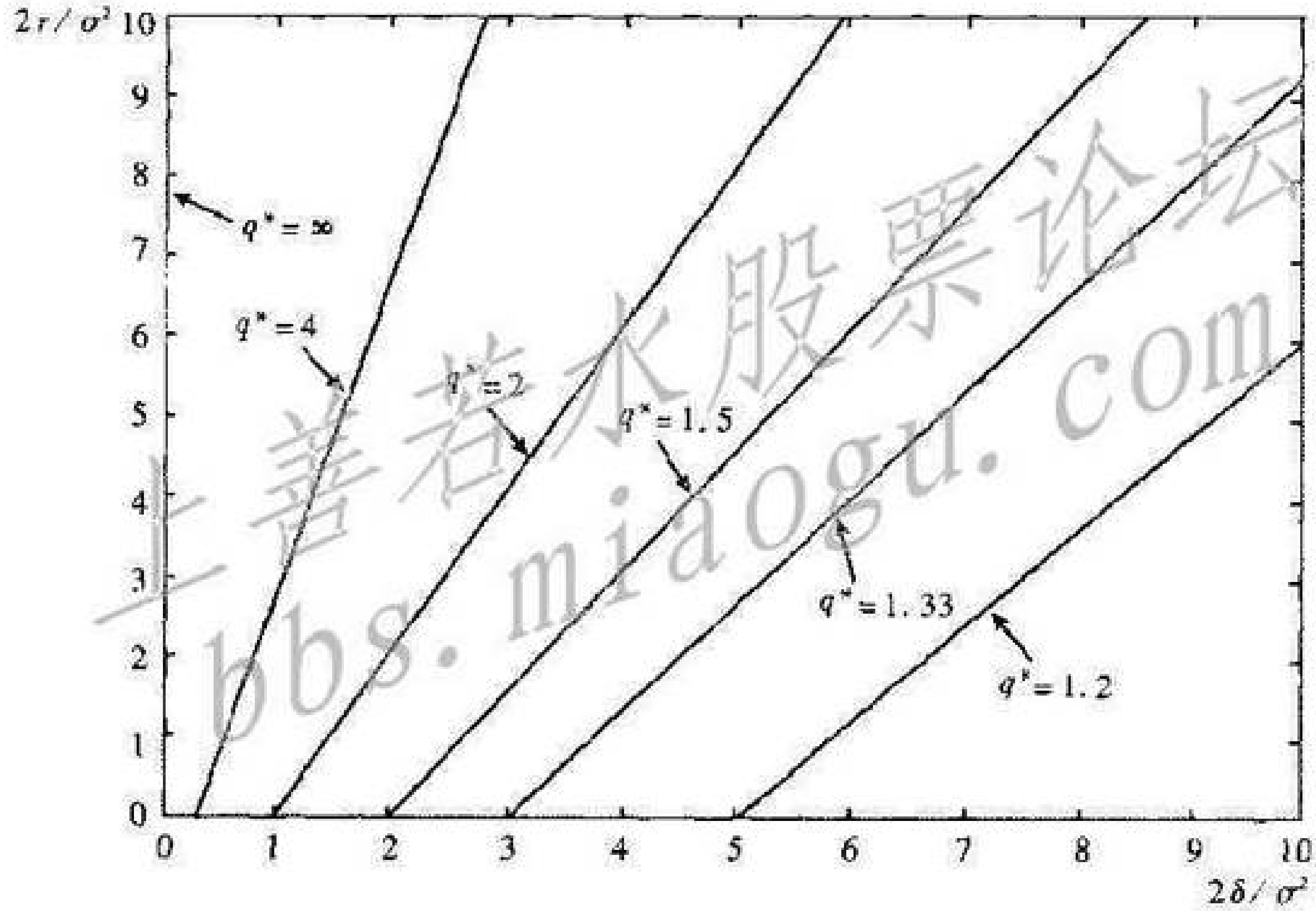
在这个计算中，我们再次保持 δ 固定，而 r 提高。实际上如果保持 α 固定，则 r 增加 1，δ 就增加 1。现在较低的 r 降低了 β_1，提高了临界水平 V^*。在这种意义上，较低的利率阻碍了投资。这是期权理念的一种纯粹表现：低利率使未来相对更重要，因此，它提高了执行投资期权的机会成本。

图 5—8 提供了考察最优投资规则如何取决于参数值的另一条途径。它也让我们根据托宾 q 来计算我们的结果。这里我们使用忽略了执行期权的机

会成本的“现有资产价值”的定义，如前面第 5.2.3 中所解释的。那么，$q^*=\frac{V^*}{I}=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}$为 q 的临界值，即投资所要求的 I 的乘数。图 5－8 显示出根据参数结合$\frac{2r}{\sigma^2}$和$\frac{2\delta}{\sigma^2}$的不同值所画出的常数 q^* 的轮廓。我们已经将 r 和 δ 扩大了$\frac{2}{\sigma^2}$ 157
倍，因为读者可以通过将 $\beta_1=\frac{q^*}{q^*-1}$代入式(5－16)来检验，$q^*$ 必须满足

$$\frac{2r}{\sigma^2}=q^*\left(\frac{2\delta}{\sigma^2}\right)-\frac{q^*}{q^*-1}$$

如图 5—8 所示，当 δ 变小或 r 变大时，该乘数变大。



上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

图 5—8　常数 $q^*=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}$的曲线

这些静态比较结论与应用于金融看涨期权的结论一样。我们的投资期权与支付股息股票的临时看涨期权相类似，这里，V 为股票价格，δ 为（百分比的）股息率，而 I 为期权执行价格。股票看涨期权的价值及最优执行规则将取决于参数 σ，δ 和 r，如图 5—1～图 5—7 所示。[11]

我们反复强调，当解释静态比较结论时，小心谨慎是非常重要的，因为不同的参数似乎并不是相互独立的。例如，无风险利率 r 的提高可能会导致

158 风险调整的预期回报 μ 的提高，而当漂移率 α 为常数时，这意味着 δ 的提高。同样地，σ 的提高似乎与 μ 的提高相伴，这再一次意味着，如果 α 为常数，则 δ 会提高。当分析市场导向的参数（如 r）的变化影响投资机会的价值及最优投资规则时，这种相互依赖必须牢记心中。

另一个必须注意的问题是，在进行静态比较试验时，我们的模型假定参数 α，σ 等为固定值。如果 α，σ 随时间或适应状态变量 V 的变化而变化（确定地或随机地），且企业知道这一点，则在决定最优投资规则时应当考虑这一点。例如，式（5－1）中的 α 和 σ 有可能会被替换为函数 $\alpha(V,t)$ 和 $\sigma(V,t)$。这将在很大程度上使该问题复杂化。如果时间影响参数，投资机会的价值可能会是 V 和时间 t 的函数，式（5－23）将变成偏微分方程。即使 α 和 σ 仅仅是 V
159 的函数，正如 V 的均值回归过程，关于 $F(V)$ 的普通微分方程也会变得更复杂，而且一般需要数值解。我们将很快看到这样一个例子。[12]

图 5—9 和图 5—10 显示了 $V-I$ 和 $F(V)=\left(\frac{1}{4}\right)V^2$ 的样本路径。在这两种情形下，我们都假定 $\mu=0.08$，因此，$\delta=0.04$，漂移率 $\alpha=0.04$。（与以前一样，$r=0.04$ 且 $\sigma=0.2$ 都为年率。）我们使每组样本路径开始于 1980 年，其中 $V_0=I=1$。考虑一个月的时间间隔，然后利用下述方程计算 V_t：

$$V_t=1.003\,27V_{t-1}+0.057\,7V_{t-1}\varepsilon_t \tag{5-25}$$

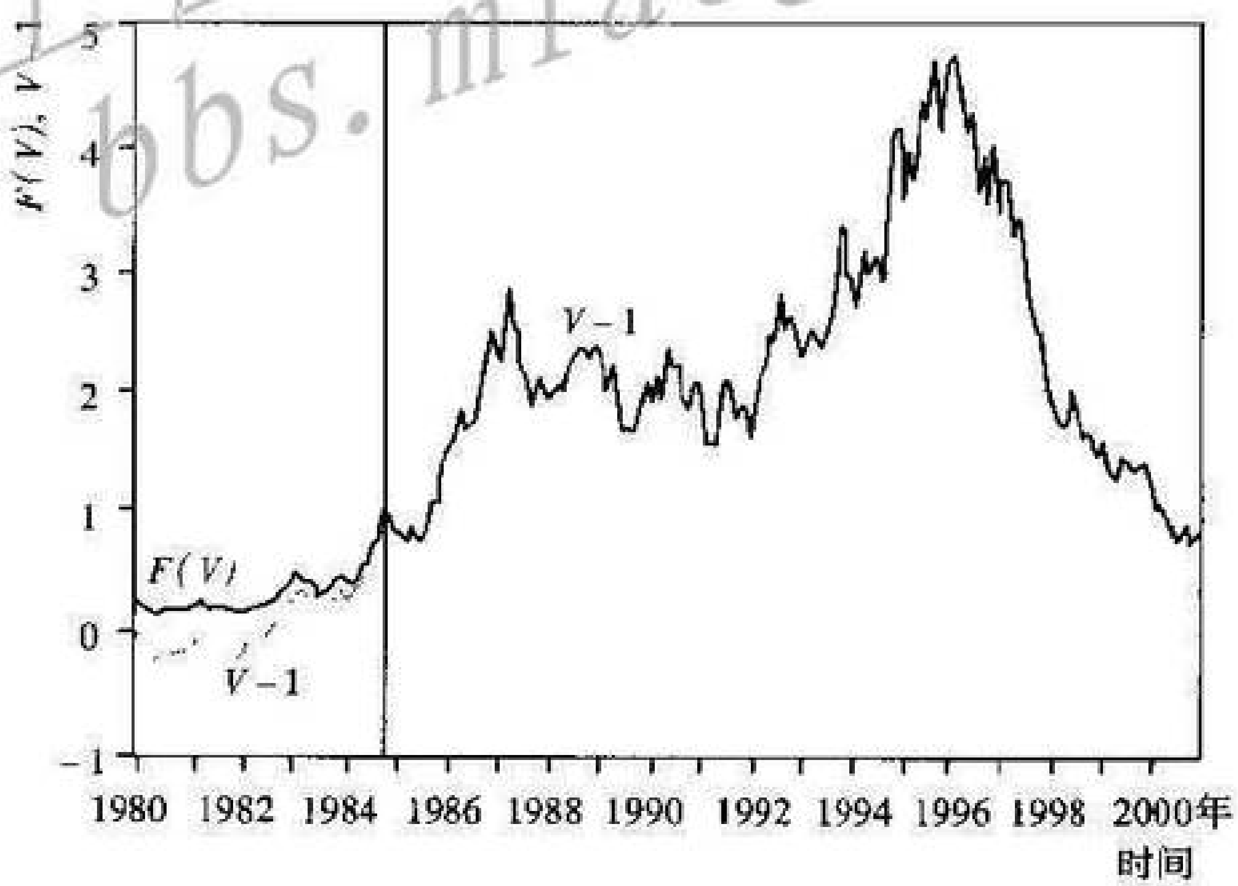


图 5—9 $F(V)$ 和 $V-I$ 的样本路径

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

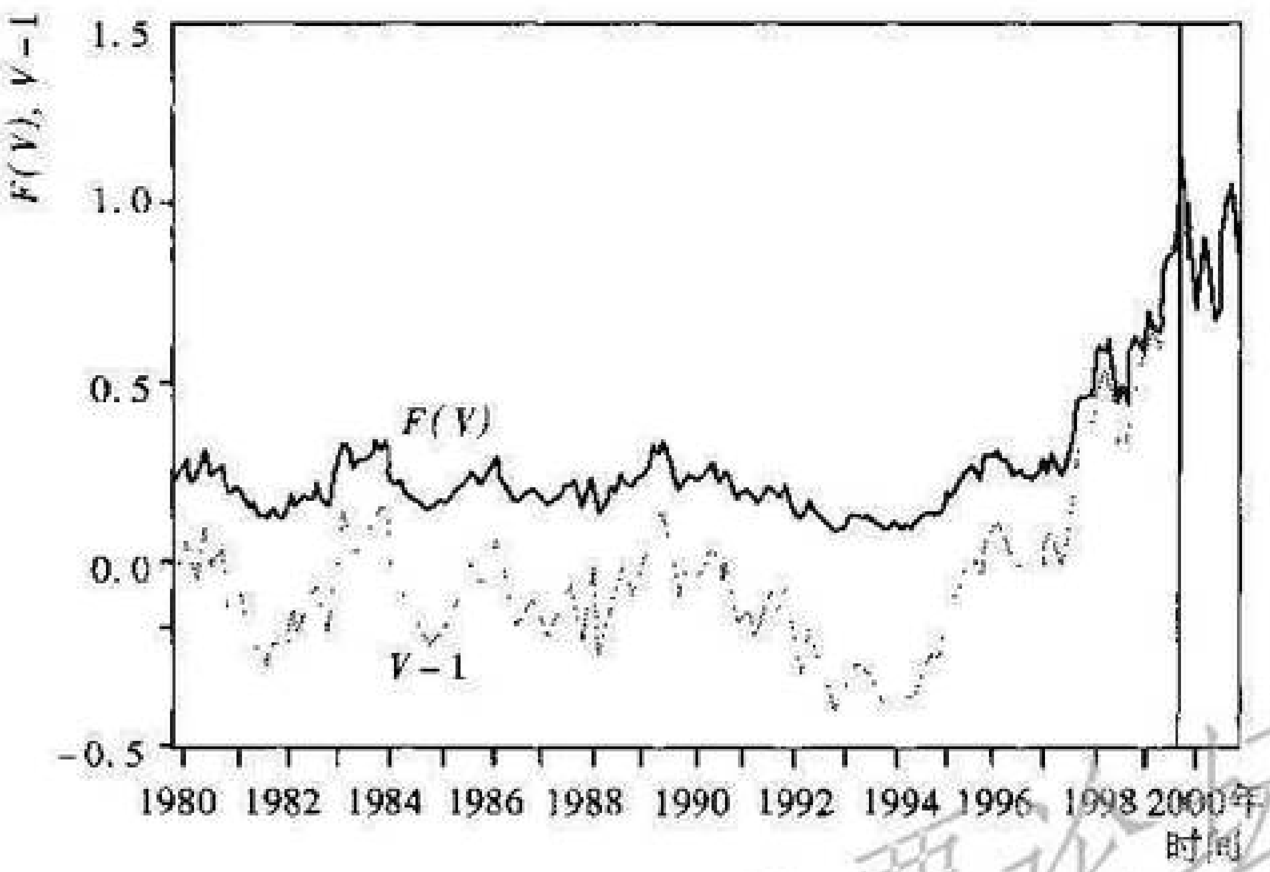


图 5—10　F(V) 和 V − I 的另一条样本路径

在每一时间 t，ϵ_t 服从均值为 0、方差为 1 的正态分布。（注意到相关系 161
数 $0.057\,7=\frac{0.20}{\sqrt{12}}$是每月的标准差。）

由于 $V_0=I=1$，标准的 NPV 规则将要求立即投资。然而，$F(V_0)=0.25$，因此，$V_0<I+F(V_0)$，且企业应当等待而不是投资。图 5—9 中，在 V 达到 $V^*=2$ 时，企业碰巧要等大约 5 年。这一等待时间在某一样本路径与下一样本路径之间能发生大幅度变化。例如，图 5—10 中所示的样本路径中，在 V 达到临界值 2 之前，企业必须等待更长——大约 20 年。[13]

5.5　其他的随机过程

利用几何布朗运动作为 V 的模型是非常方便的，但是在一些情形下却是不现实的。在这里，将考察当 V 遵循其他的随机过程时投资机会的价值及最优投资规则。我们首先要考虑均值回归过程，然后再来考虑泊松跳跃过程。

上善若水股票论坛 bbs.mlaogu.com

5.5.1 均值回归过程

假定 V 服从均值回归过程

$$dV=\eta(\bar{V}-V)V\mathrm{d}t+\sigma V\mathrm{d}z \tag{5-26}$$

因此，预期 V 变化的百分率为 $\left(\frac{1}{\mathrm{d}t}\right)E\left(\frac{\mathrm{d}V}{V}\right)=\eta(\bar{V}-V)$，预期 V 的绝对变化为 $\left(\frac{1}{\mathrm{d}t}\right)E(\mathrm{d}V)=\eta(\bar{V}V-V^2)$，为一在 $V=0$ 和 $V=\bar{V}$ 时等于零且最大值为 $V=\frac{\bar{V}}{2}$ 的抛物线。正如我们将要看到的，这一特殊过程的优势在于能够获得投资问题的解析解。

为找到最优投资规则，我们将利用或有债权分析。令 μ 为项目的风险调
162 整的贴现率（即 μ 反映了 V 随机波动中的系统性风险）。在这种情形下，V 的预期增长率不是常数，而是 V 的函数。因此"差额" $\delta=\mu-\left(\frac{1}{\mathrm{d}t}\right)\frac{E(\mathrm{d}V)}{V}$ 好像是 V 的函数：[14]

$$\delta(V)=\mu-\eta(\bar{V}-V) \tag{5-27}$$

我们再次应用微分方程式（5－23），但式（5－27）代替了其中的 δ。因此，F 预期（V）必须满足下式：

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2F''(V)+[r-\mu+\eta(\bar{V}-V)]VF'(V)-rF=0 \tag{5-28}$$

而且与以前一样，由于同样的原因，$F(V)$ 必须满足边界条件式（5－10）～式（5－12）。（注意 $V=0$ 是式（5－26）的吸收壁，因此，$F(0)=0$。）

找到式（5－28）的解比找到式（5－23）的解要复杂一些。我们通过式（5－29）定义了一个新函数 $h(V)$：

$$F(V)=AV^{\theta}h(V) \tag{5-29}$$

式中，A 和 θ 为常数。通过令 $h(V)$ 满足已知解的微分方程的这样一种方式，很快就可以选出这两个常数。将 $F(V)$ 的表达式代入式（5－28）并整理，给出方程：

$$V^{\theta}h(V)\left[\frac{1}{2}\sigma^2\theta(\theta-1)+(r-\mu+\eta\bar{V})\theta-r\right]+V^{\theta+1}\left[\frac{1}{2}\sigma^2Vh''(V)+(\sigma^2\theta+r-\mu+\eta\bar{V}-\eta V)h'(V)-\eta\theta h(V)\right]=0 \tag{5-30}$$

对任意的 V 值，式（5－30）都必须成立，因此，方程第一行和第二行方括号中的项必须等于零。首先我们令方程第一行方括号中的项等于零来选择 θ：

$$\frac{1}{2}\sigma^2\theta(\theta-1)+(r-\mu+\eta\overline{V})\theta-r=0$$

这个二次方程式关于 θ 有两个解，一个为正，另一个为负。为满足 $F(0)=0$ 的边界条件，我们使用正解：

$$\theta=\frac{1}{2}+\frac{\mu-r-\eta\overline{V}}{\sigma^2}+\sqrt{\left(\frac{r-\mu+\eta\overline{V}}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{\sigma^2}} \tag{5-31}$$

从式（5－30）的第二行，我们有 163

$$\frac{1}{2}\sigma^2Vh''(V)+(\sigma^2\theta+r-\mu+\eta\overline{V}-\eta V)h'(V)-\eta\theta h(V)=0 \tag{5-32}$$

通过作出 $x=\frac{2\eta V}{\sigma^2}$ 的替换，我们可以将式（5－32）变形为标准形式。令 $h(V)=g(x)$，因此，$h'(V)=\left(\frac{2\eta}{\sigma^2}\right)g'(x)$ 且 $h''(V)=\left(\frac{2\eta}{\sigma^2}\right)^2g''(x)$。那么式（5－32）变为

$$xg''(x)+(b-x)g'(x)-\theta g(x)=0 \tag{5-33}$$

式中，

$$b=2\theta+\frac{2(r-\mu+\eta\overline{V})}{\sigma^2}$$

式（5－33）被称为库默（Kummer）方程。其解是合流超几何函数 $H(x;\theta,b(\theta))$，它有下面的级数表达式：[15]

$$H(x;\theta,b)=1+\frac{\theta}{b}x+\frac{\theta(\theta+1)}{b(b+1)}\frac{x^2}{2!}+\frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)}{b(b+1)(b+2)}\frac{x^3}{3!}+\cdots \tag{5-34}$$

我们已经证明式（5－28）的解实际上是式（5－29）的形式。解为

$$F(V)=AV^{\theta}H\left(\frac{2\eta}{\sigma^2}V;\theta,b\right) \tag{5-35}$$

式中，A 为需要确定的常数。从剩余的两个边界条件中，即 $F(V^*)=V^*-I$ 与 $F_V(V^*)=1$，我们可以发现 A，以及在该点最优投资的临界值 V^*。因为合流超几何函数为一无限级数，必须寻找 A 和 V^* 的数值解。

通过考察几个数字例子，我们可以获得有关均值回归效应的一些知识。除非特别声明，我们将设定 $I=1$，$r=0.04$，$\mu=0.08$，$\sigma=0.2$。我们改变 η 与 $\overline{V}$，然而，注意到 $\left(\frac{1}{dt}\right)\frac{E(dV)}{V}$ 对 η 的依赖取决于 $\overline{V}$ 的规模。我们将在

上善若水股票论坛 bbs.mjaogu.com

跨度0.5~1.5之间计算 $\bar{V}$ 的值，因此，η 值为0.5或隐含着一个非常高的均值回归率。

164 图5—11显示了 $\eta=0.05$ 时（隐含着相对低的均值回归率），$\bar{V}=0.5$，1.0和1.5时投资机会 $F(V)$ 及临界值 V^* 的值。为了比较，注意到如果 $\eta=0$，模型符合前面的基本模型，其中 $\alpha=0$，$\delta=\mu=0.08$；在那种情形下，V^* 非常接近1.39。正如我们所期望的，η 值越小，$\bar{V}$ 越大，$F(V)$ 越大且 V^* 越高。其他不变，较大的 $\bar{V}$ 意味着 V 的较高预期增长率，因此，购买 V 的期权将越大。

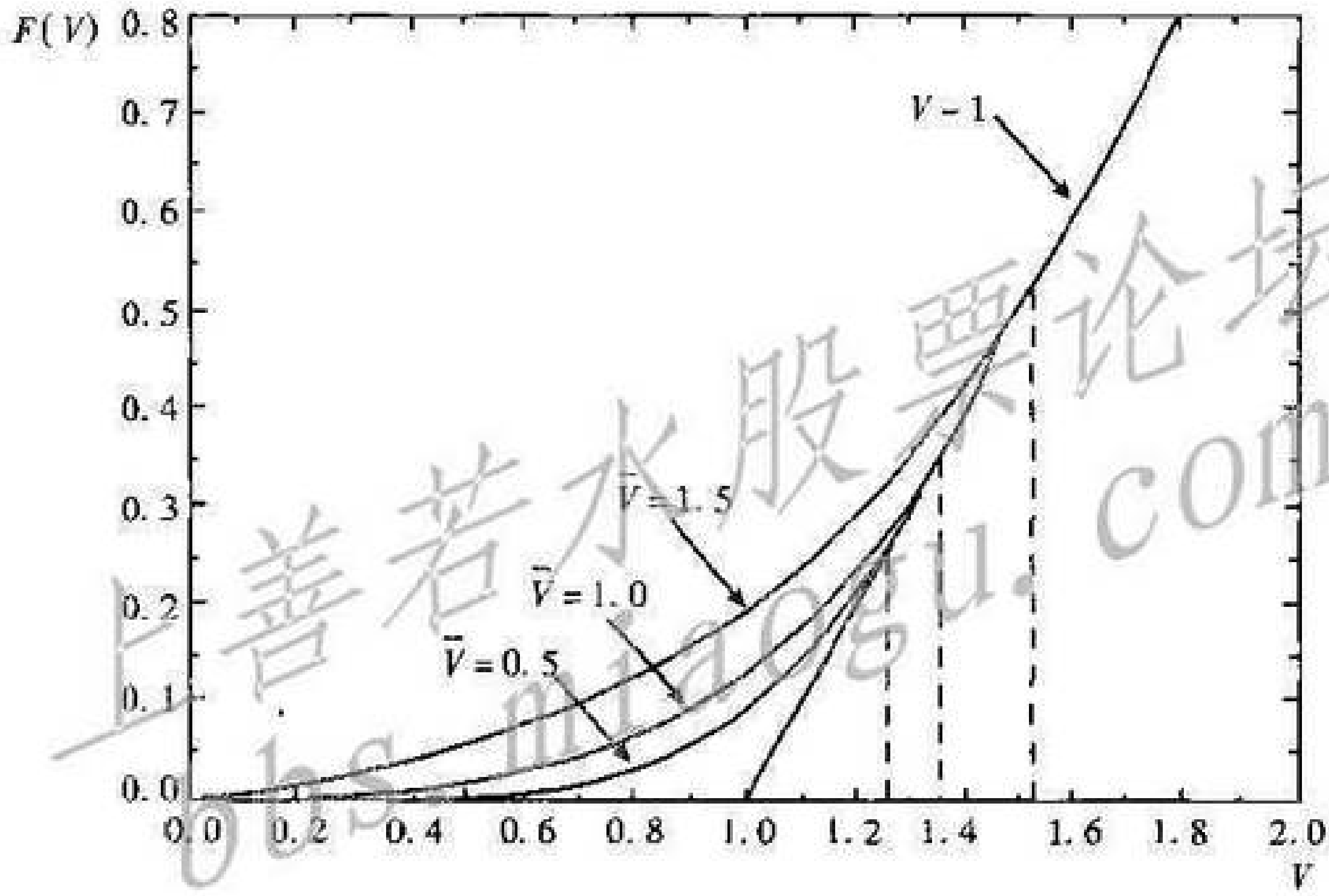


图5—11 均值回归，$F(V)$，$\eta=0.05$，$\bar{V}=0.5$，1.0和1.5

图5—12和图5—13也显示了 $\bar{V}=0.5$，1.0和1.5时投资机会 $F(V)$ 及临界值 V^* 的值，但是在图5—12中，$\eta=0.1$，而在图5—13中，$\eta=0.5$。正如这些图所显示的，当 $\bar{V}=1.5$ 时（大于 I），较大的 η 值提高了 $F(V)$，但是当 $\bar{V}=0.5$ 时（小于 I），较大的 η 降低了 $F(V)$。（如果 $\bar{V}<I$ 且 η 很大，V 在大多数时间内都超过 I 是不大可能的，投资的期权也不会很大。另外，如果 $\bar{V}>I$ 且 η 很大，即使 V 开始时很小，它也会很快上涨到超过 I 并且在大多数时间内保持高于 I，因而 $F(V)$ 将会很大。）

图5—12和图5—13还显示出，如果 $\bar{V}$ 和 η 都很大，$F(V)$ 将不再是
165 单凸的；对小的 V 值它将变成凹的。这是我们用于描述 V 的演化的特殊随

机过程式（5－26）的结论。那一过程在 $V=0$（因而 $F(V)=0$）时有一个吸收壁，但是对于小且为正值的 V，均值回归的吸收率很快上升，因此，$F(V)$

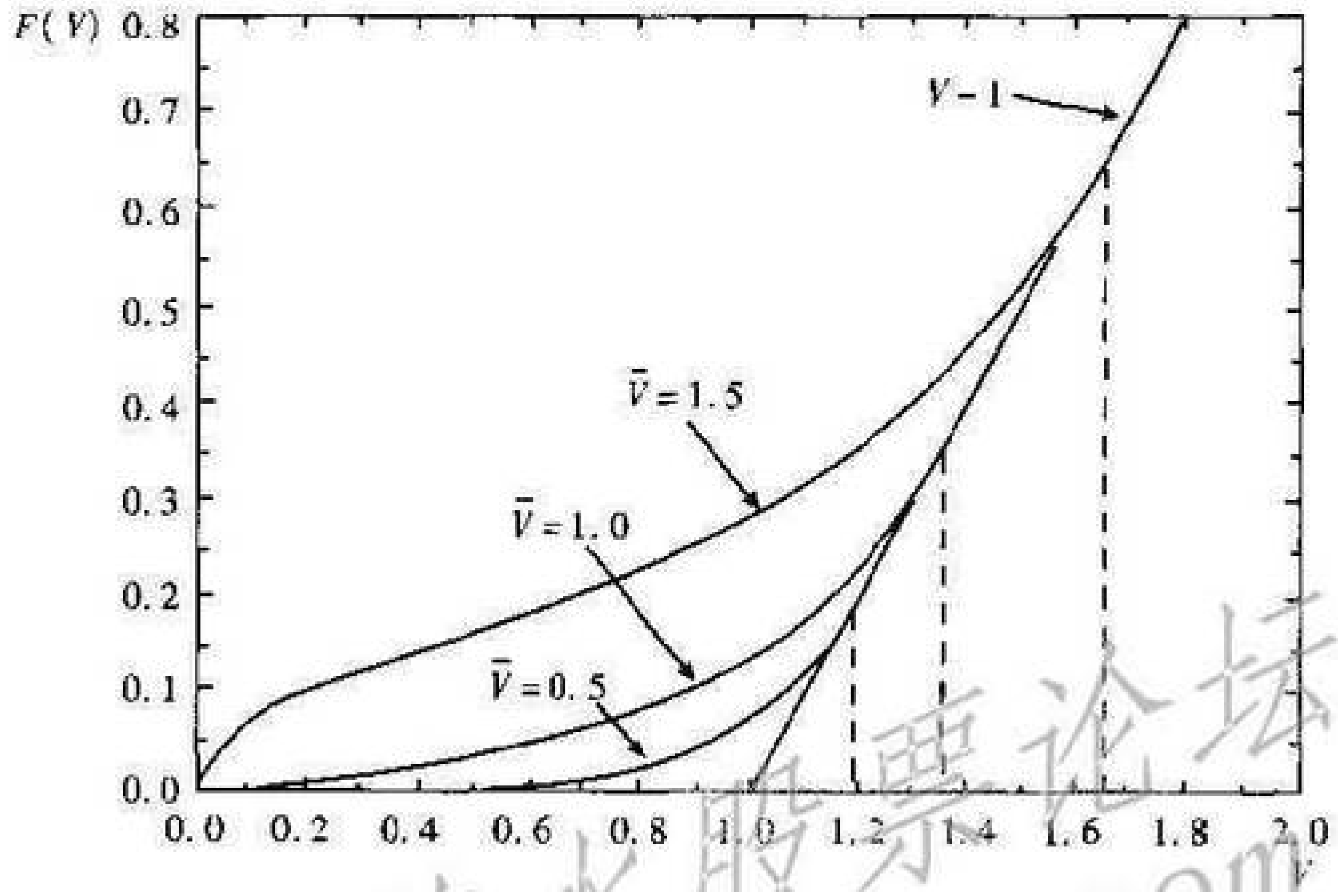


图 5—12　均值回归，$F(V)$，$\eta=0.1$，$\bar{V}=0.5$，1.0 和 1.5

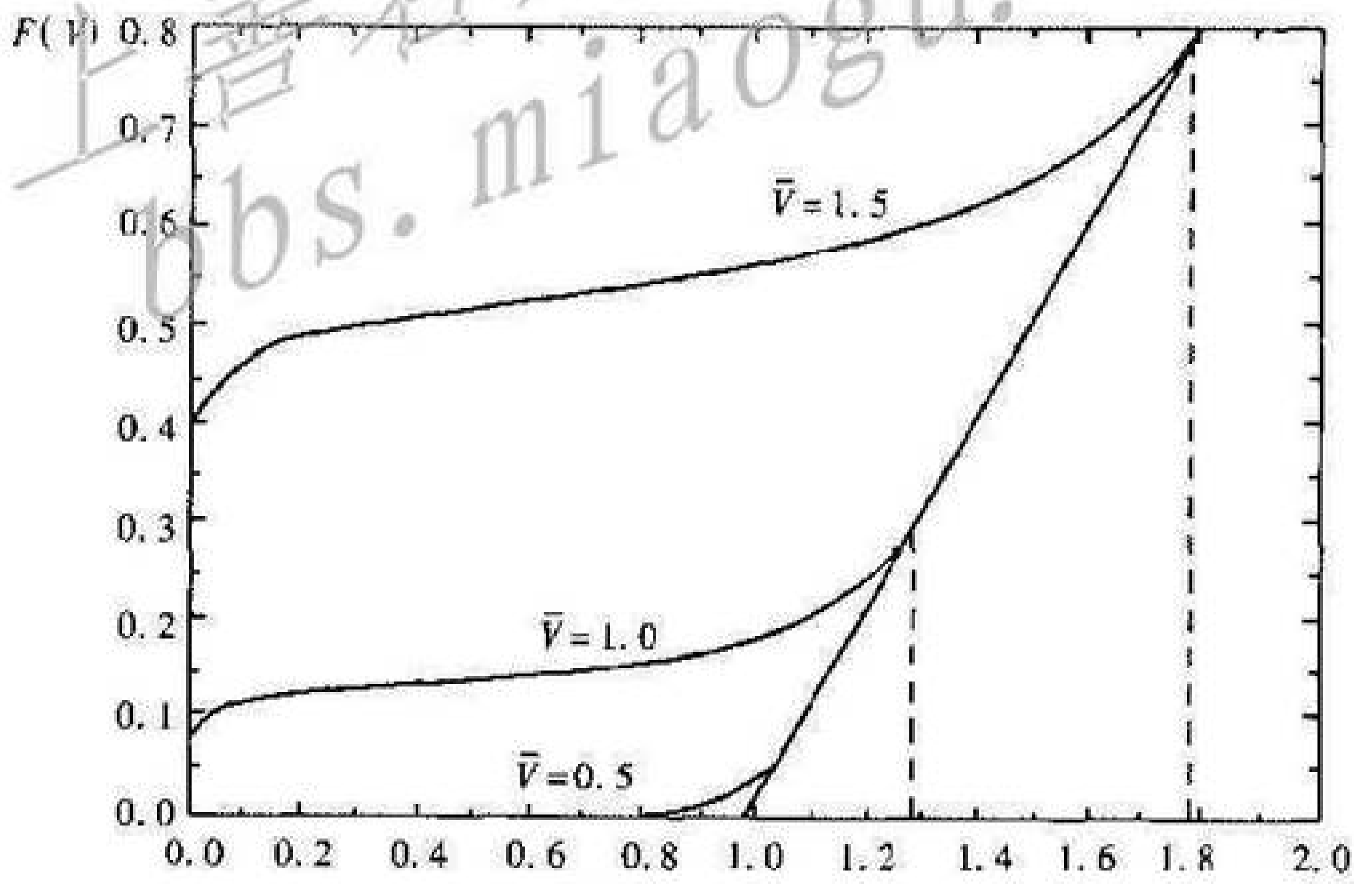


图 5—13　均值回归，$F(V)$，$\eta=0.5$，$\bar{V}=0.5$，1.0 和 1.5

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

似乎将快速上升。这一点在图 5—13 中 $\bar{V}=0.5$ 的情形下更明显；$F(0)=0$，但是一旦 V 略大于零时，V 的预期增长率就变得很大，因而，$F(V)$迅速上升。

图 5—14 显示了 $\bar{V}=0.5$，1.0 和 1.5 时作为均值回归参数 η 的函数的临界值 V^*。观察到 $\bar{V}$ 很大时，V^*随 η 的增加而增长；$\bar{V}$ 很小时，V^*随 η 的减少而减少。这正是我们在以前所看到。当 $\bar{V}$ 很大时，较大的 η 提高了$F(V)$（从而提高了 V^*），当 V 很小时，较大的 η 值降低了$F(V)$。图 5—14 表明，$\bar{V}=I$ 是一条分割线，但事实上，V^*随 η 是升还是降取决于风险调整的预期回报率μ。在图 5—14 中，$\mu=0.08$。图 5—15 也显示出，V^*为 η 的函数，但是仅对 $\mu=0.04$，其他不变。较低的 μ 值意味着更低的预期资本收益“不足”率，$\delta=\mu-\left(\frac{1}{\mathrm{d}t}\right)\frac{E(\mathrm{d}V)}{V}$，以及更大的$F(V)$值。当
166 η很小时，$F(V)$ 的这种提高将是最显著的。（当 η 很大时，在任何预期的情形下，V 都将很快回归到$\bar{V}$。）因此，如果 μ 很小，V^*将随 η 递减，除非 $\bar{V}$ 远远大于I。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

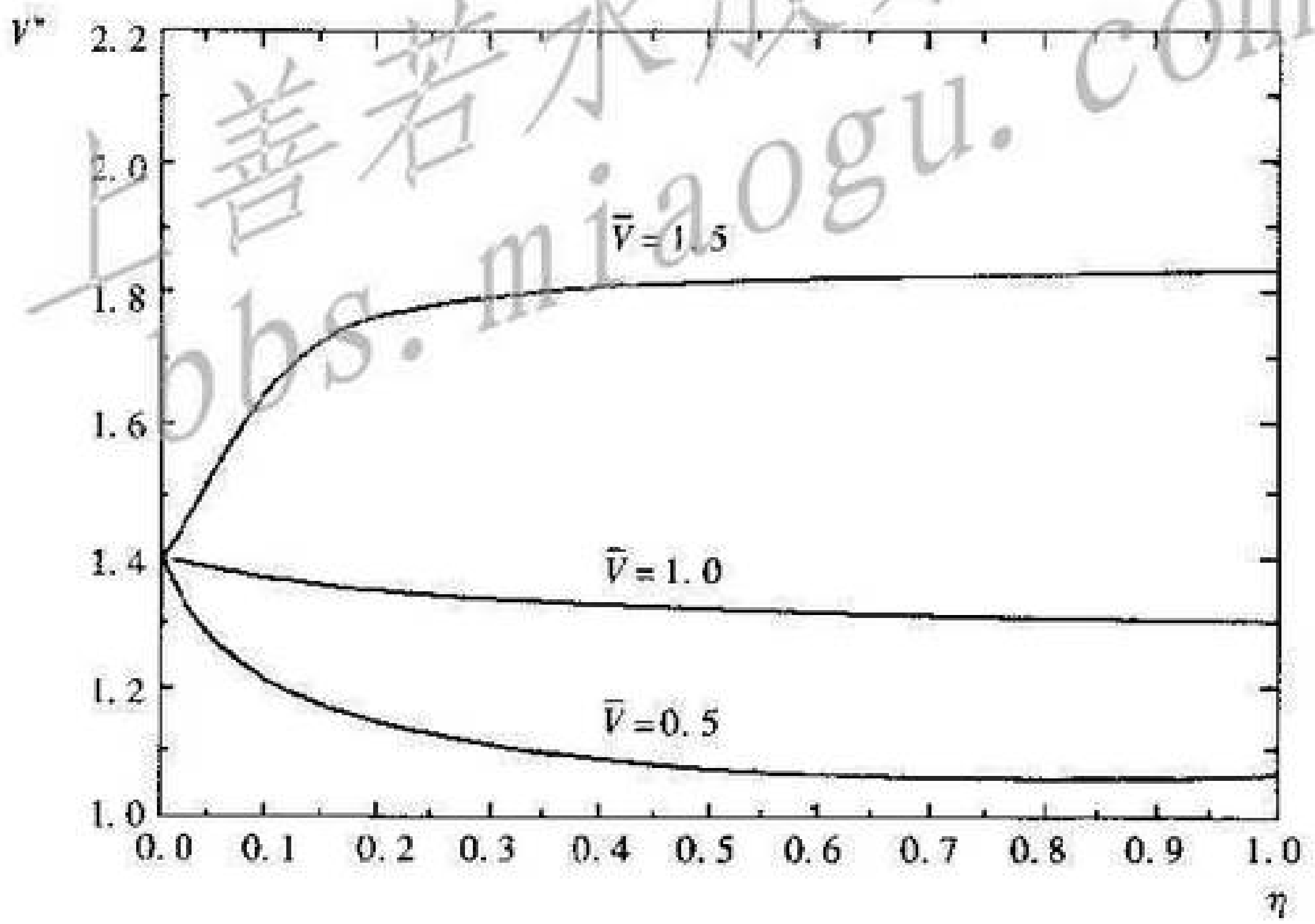


图 5—14　V 作为 η 的函数在 $\mu=0.08$，$\bar{V}=0.5$，1.0 和 1.5 时的临界值 V^*

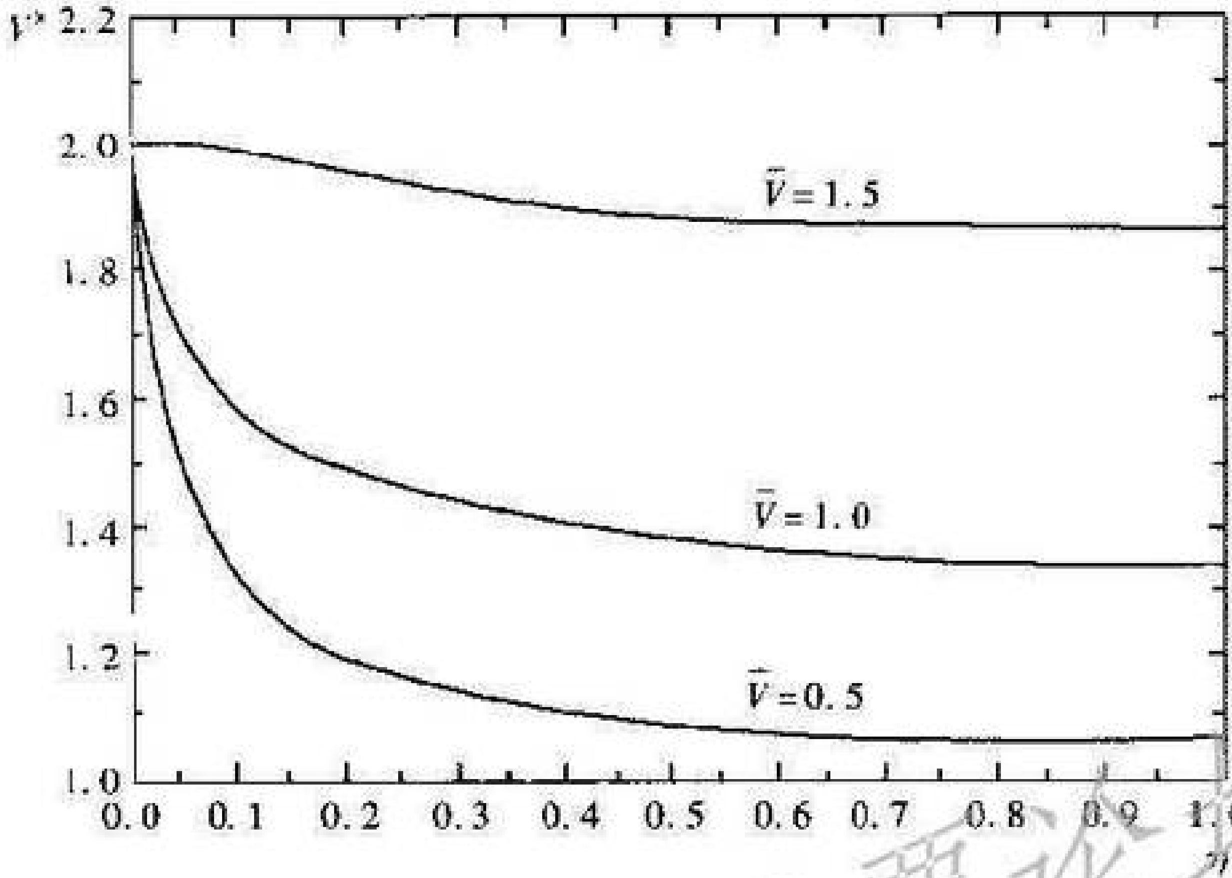


图5—15 V作为η的函数在$\mu=0.04$，$\bar{V}=0.5$，1.0和1.5时的临界值V^*

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

最后，图5—16和图5—17说明了V^*对μ的依赖。图5—16显示了在$\bar{V}=1.0$，$\eta=0.05$，0.1和0.5时，V^*作为μ的函数。图5—17显示了同样的内容，但$\bar{V}=1.5$。注意到在所有情形下，V^*随μ下降；另外，较高的μ意味着更高的资本收益“不足”率$\delta(V)$，因而有较低的$F(V)$和较低的V^*。然而，下降率取决于$\bar{V}$及η。η很小时，V^*开始于较大值（如果$\eta=0$，模型将再次下降到前面所述的那种情形，其中$\alpha=0$，$\delta=\mu$，因此，$\lim_{\mu\to 0} V^*\to\infty$），而且下降得快（因为回归到$\bar{V}$的速度很快，因此，关于$V$的资本预期收益率很小）。正如我们预期的，无论$\eta$与$\mu$的值如何，$\bar{V}$越大，$V^*$（及$F(V)$）也越大。

我们对V所选择的均值回归过程式（5-26）在导致投资机会的价值及最优投资规则的拟解析解方面是方便的。这不应当被看做是特别的限定，幸好我们已经对V指定了一些其他的均值回归过程（例如，均值回归的绝对速度而不是百分比对V是线性的）。取决于这一过程，$F(V)$最终的微分 167
方程可能或不可能拥有已知的级数解。在任何情形下，它可以通过数值来求解，但通常存在一定的难度。

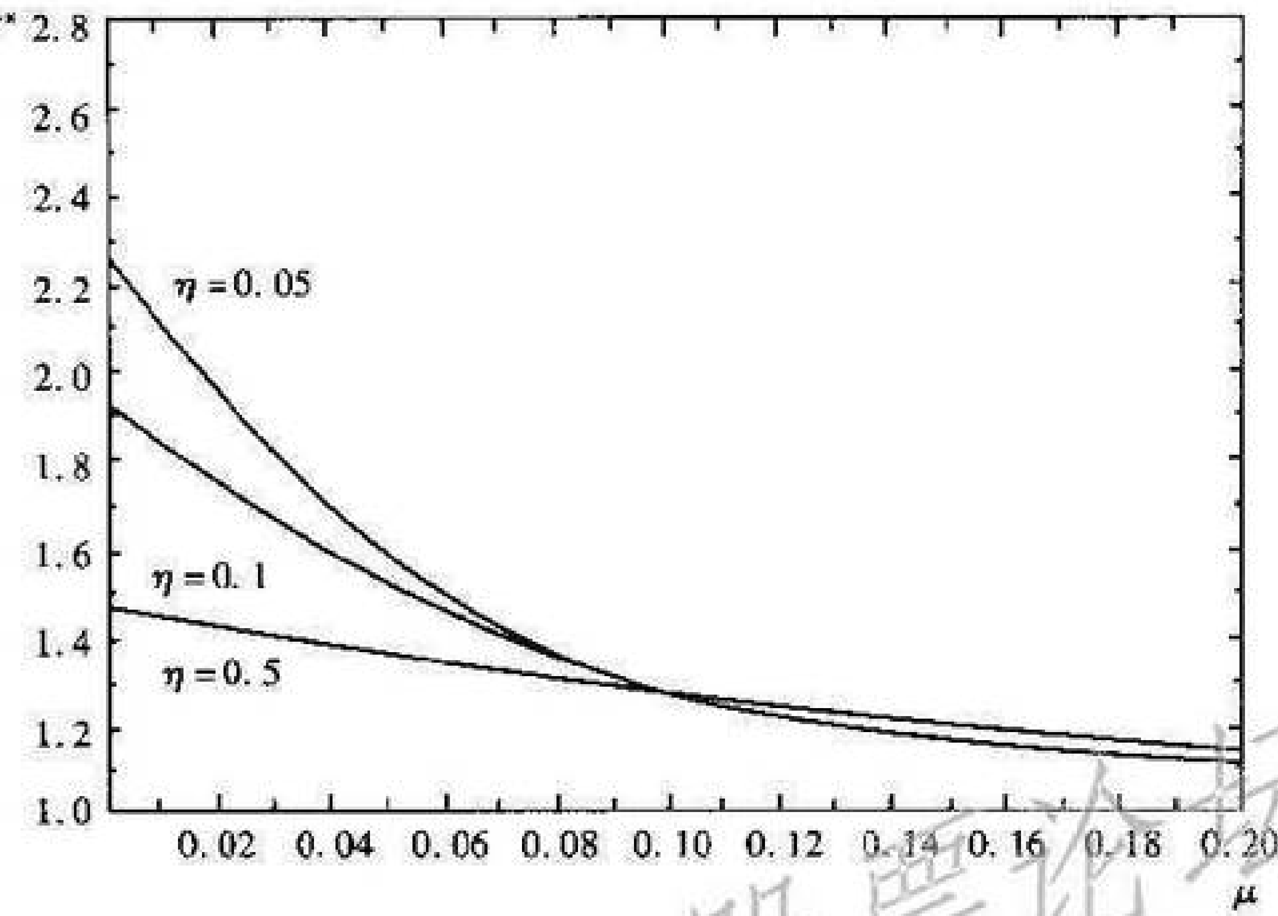


图 5—16　V 作为 μ 的函数在 $\bar{V}$=1.0，η=0.05，0.1 和 1.5 时的临界值 V*

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

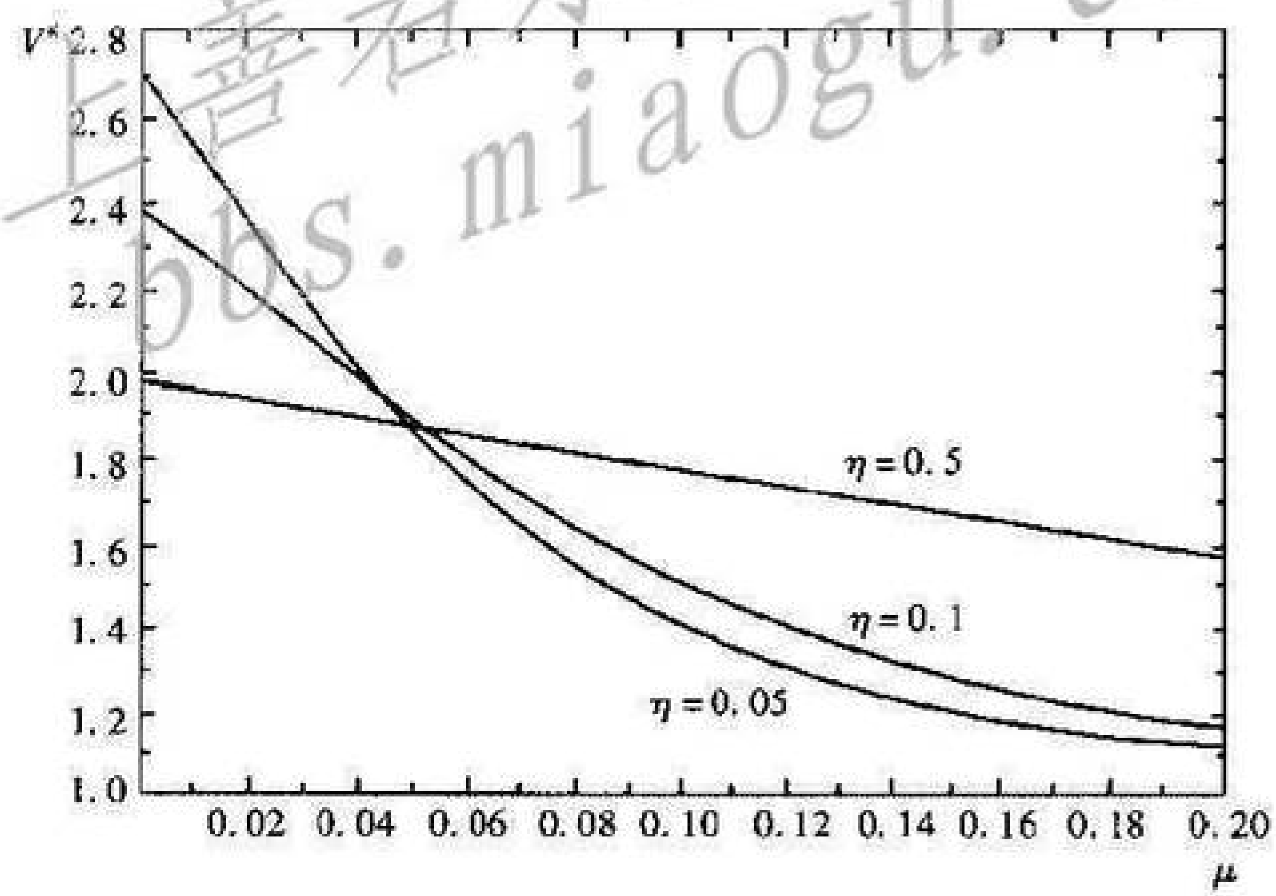


图 5—17　V 作为 μ 的函数在 $\bar{V}$=1.5，η=0.05，0.1 和 0.5 时的临界值 V*

5.5.2 布朗运动与跳跃过程的结合

现在回到我们的基本模型，其中 V 服从几何布朗运动，并以不同的方式将其展开。这一次我们考虑时间上的一些随机点的可能性，V 将有向后的泊松跳跃。这种模型可能描述了这样一种情形：一家公司拥有一种专利，这种专利赋予该公司对一个价值为 V 的项目进行投资的期权，但是其他公司也做研究，如果成功，将允许它们投资类似的项目；如果那些其他公司中有一家成功，引起的竞争将减少利润，因而降低 V。

为修正我们的基本模型，我们将假定 V 服从混合的布朗运动/跳跃过程：

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dz - V dq \tag{5-36}$$

式中，dq 为平均到达率为 λ 的泊松过程中的增量；dq 和 dz 是独立的（因 168
而 $E(dzdq)=0$）。我们假定，如果某一“事件”发生，q 将以概率 1 下降固定的百分比 $\phi(0\leqslant\phi\leqslant1)$。这样式（5-36）表明，$V$ 将以几何布朗运动波动，但是在每一时间间隔 dt，它都将以一小概率 λdt 下降到其初始价值的（$1-\phi$）倍，然后它继续波动，直到另一事件发生。（这类泊松跳跃过程在第 3 章中已描述过。）

弄清楚式（5-36）的意义是非常重要的。首先，注意到 V 的预期变化百分率不是 α，而是 $\left(\frac{1}{dt}\right)\frac{E(dV)}{V}=\alpha-\lambda\phi$，因为在每一时间间隔 dt，V 下降 100% 的概率为 λdt。这样，λ 的提高通过增加 V 瞬时下跌的机会而降低了 V 的资本预期收益率。其次，因为泊松事件仅仅是不频繁地发生，在大部分时间里，在一很短时间区间 dt 内，$\frac{dV}{V}$ 的方差正好是布朗运动部分的方差 $\sigma^2 dt$。然而，如果泊松事件发生，它会导致非常大的偏差，因此，它对在时刻 t 给定信息下计算出来的方差的贡献不能忽略。利用布朗运动的随机游动近似，为简化起见，我们设定 $\alpha=0$ 并写成下式： 169

$$dV=\begin{cases}\sigma V\sqrt{dt}, & \text{概率为}\frac{1}{2}(1-\lambda dt)\\ -\sigma V\sqrt{dt}, & \text{概率为}\frac{1}{2}(1-\lambda dt)\\ -\phi V, & \text{概率为}\lambda dt\end{cases}$$

那么

$$E[dV] = -\lambda dt\phi V$$

$$
\begin{aligned}
E[(\mathrm{d}V)^2] &= (1-\lambda \mathrm{d}t)\sigma^2 V^2 \mathrm{d}t + \lambda \mathrm{d}t \phi^2 V^2 \\
\mathrm{Var}[\mathrm{d}V] &= E[(\mathrm{d}V)^2] - \{E[\mathrm{d}V]\}^2 \\
&= (1-\lambda \mathrm{d}t)\sigma^2 V^2 \mathrm{d}t + \lambda \mathrm{d}t \phi^2 V^2 - \lambda^2 \phi^2 V^2 (\mathrm{d}t)^2 \\
&= \sigma^2 V^2 \mathrm{d}t + \lambda \phi^2 V^2 \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

式中忽略含（$\mathrm{d}t)^2$ 的项，等等。

注意到这一方差有两个部分。第一个部分 $\sigma^2 V^2 \mathrm{d}t$ 为 $\mathrm{d}V$ 的瞬时（或
170 “局部”）方差，它来自过程的布朗运动部分，而且以没有跳跃发生为条件。第二个部分 $\lambda\phi^2 V^2 \mathrm{d}t$，说明跳跃的可能性。不久我们将利用伊藤引理来找到函数 V 的微分。正如我们在第 3 章所看到的，当伊藤引理应用于混合布朗运动/跳跃过程中时，这一方差中只有第一个部分贡献了包含二阶导数的项；跳跃部分贡献了包含在不同离散点上的价值差异的项。

最后，为了测量 λ 变化的影响，我们想知道 T 的期望值，它是指 V 在下降前连续波动的时间。为决定 $E(t)$，我们利用这样的事实，即在时间间隔（0，T）内事件不发生的概率为 $e^{-\lambda T}$。因此，在小的间隔（T，$T+\mathrm{d}T$）内第一个事件发生的概率为 $e^{-\lambda T}\lambda \mathrm{d}T$。因此，直到 V 发生泊松跳跃之前的期望时间为

$$E[T] = \int_0^\infty \lambda T e^{-\lambda T} \mathrm{d}T = \frac{1}{\lambda} \qquad (5-37)$$

171 现在我们要利用动态规划来解决最优投资规则。我们假定，企业为风险中性的，因此，其贴现率为 $\rho = r$。那么投资机会价值 $F(V)$ 的贝尔曼方程为

$$rF\mathrm{d}t = E(\mathrm{d}F)$$

我们现在利用混合布朗运动与泊松过程的伊藤引理来展开 $\mathrm{d}F$（参见第 3.5 节）：

$$rF\mathrm{d}t = \alpha VF'(V)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F''(V)\mathrm{d}t - \lambda\{F(V) - F[(1-\phi)V]\}\mathrm{d}t \qquad (5-38)$$

用 $r-\delta$ 代替 α，上式可重写为

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F''(V) + (r-\delta)VF'(V) - (r+\lambda)F(V) + \lambda F[(1-\phi)V] = 0 \qquad (5-39)$$

同样的边界条件式（5-10）～式（5-12），像以前那样应用。

式（5-39）的解再次为 $F(V)=AV^{\beta_1}$ 的形式，但是现在 β_1 为更复杂一点的非线性方程的正解：

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)+(r-\delta)\beta-(r+\lambda)+\lambda(1-\phi)^{\beta}=0 \qquad (5-40)$$

可以在数量上找到既满足式（5－40），同时也满足条件 $F(0)=0$ 的 β 值。那么给定 β_1，也可以从式（5－14）和式（5－15）中找到 V^* 和 A，它们依次分别服从边界条件式（5－11）和式（5－12）。[16]

图5—18显示了 $\phi=0$，0.4，1时作为 σ 函数的临界值 V^*。（在每种情形下，$\lambda=0.1$，$r=\delta=0.04$ 且 $I=1$。）注意 ϕ 越大，V^* 越小。原因是 ϕ 较大的值意味着投资机会的价值较小（当事件发生时，V 将下降较大的比例），这意味着现在就投资而不是等待的机会成本较小。

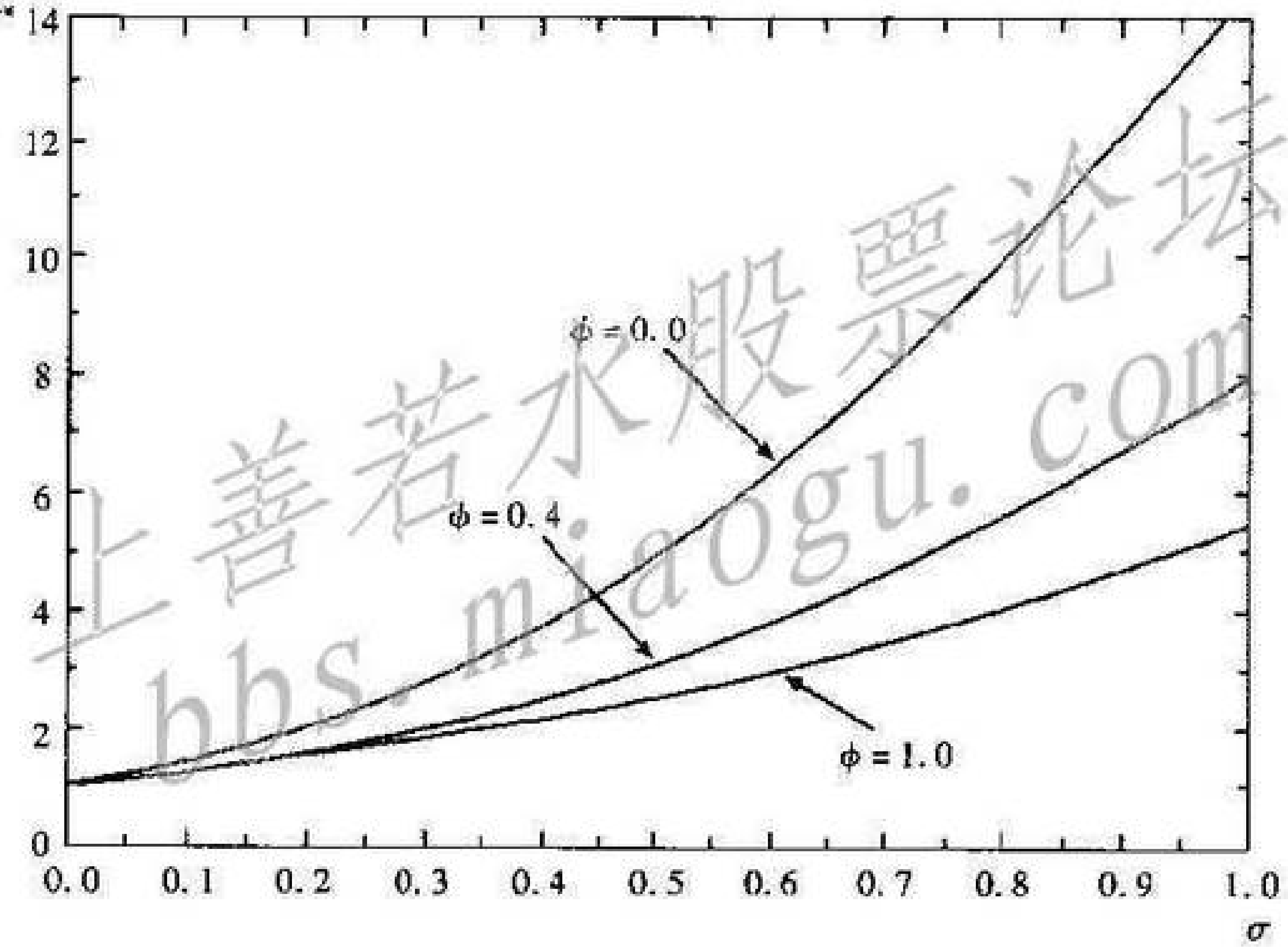


图5—18 λ＝0.1时作为混合泊松过程和布朗运动的σ的函数的临界值V*

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

表5—1显示了 $\phi=1$ 时（因此，当事件发生时，V 下降为0）不同 λ 值下的 β_1，V^* 及 A。（在本表中，$r=\delta=0.04$，$\sigma=0.2$ 且 $I=1$。）λ 的正值以两种方式影响投资机会的价值。首先，它减少了 V 的预期资本收益率（从 α 下降到 $\alpha-\lambda$），这降低了 $F(V)$。其次，它提高了 V 在有限时间间隔内变化百分率的方差，而这似乎会提高 $F(V)$。正如表5—1所示，其净效应是减少 $F(V)$，因此，降低临界值 V^*。此外，这种净效应非常强大；λ 172

的微小增加导致 V^* 的大幅下降。例如，利用式（5－37），我们知道，如果 $\lambda=0.2$，V 保持为正的预期时间 $E(T)$ 为5年，但是与 $\lambda=0$ 时进行比较，A 下降了一半多，而 V^* 从 2 下降到 1.33。

表 5—1　　β_1，V^* 和 A 对 λ 的依赖

（$I=1$，$\phi=1$，$r=\delta=0.04$ 及 $\sigma=0.2$）

λ	β_1	V^*	A
0	2.00	2.00	0.250
0.05	2.70	1.59	0.169
0.1	3.19	1.46	0.138
0.2	4.00	1.33	0.105
0.3	4.65	1.27	0.009
0.5	5.72	1.21	0.007
1.0	7.73	1.15	0.005

正如我们在前面所说的，当解释静态比较结论时小心谨慎是非常重要的。在这种情形下，我们在保持 α 固定的条件下增加 λ。有人会争论说，由市场决定的 V 的预期回报率（在这种情形下为无风险利率 r）将保持为常数，因此 λ 的增加伴随着 α 的相应增加（否则没有投资者会选择持有该项目）。假定 $\phi=1$，那么，如果 α 与 λ 提高一样多，那么 $\alpha-\lambda$ 仍为常数，我们可以用（$r+\lambda-$
173 δ）来替换式（5－40）中的（$r-\delta$）。在这种情形下，λ 的增加将与无风险利率 r
的提高相同，而且将导致 $F(V)$ 和 V^* 的提高。[17]

由式（5－36）给出的特定的跳跃过程使得关于 $F(V)$ 的微分方程很容易解。当然，人们可以为 V 指定其他过程。例如，一家持有专利的企业可能面临许多潜在的竞争者，每一个竞争者试图开发自己的专利。一个竞争者的胜利会引起 V 的随机数量的下降，而不是固定数量的下降。随着时间的推移，其他竞争者可能在进入市场时获得成功，因此，V 持续下降。然而，此类模型的最优投资规则的计算将更困难，而且似乎必须采用数量解的方法。

5.6　文献导引

麦克唐纳-西格尔（McDonald-Siegel，1986）模型的前身包括：迈尔斯（Myers，1977）的工作，他证明企业的投资期权是其市场价值的成分；图林

上海老股票论坛 bbs.miaogu.com

雀（Tourinho，1979）的工作，他证明自然资源储备可以看做是生产该种资源的期权并根据它来定价；以及丘吉尔曼（Cukierman，1980）和伯奈克 174（Bernanke，1983）的工作。后两位作者还发展了企业拥有推迟不可逆投资决策从而可以等待新信息的到来的激励的模型。然而，在他们的模型中，这种信息使项目的未来价值比较确定；我们在本章关注的是随时间推移有信息到来的情形，但是未来总是不确定的。布罗克、罗思柴尔德和斯蒂格利茨(Brock, Rothschild and Stiglitz, 1988)考察了不确定性对资本理论的含义，德默斯(Demers, 1991)是研究随着时间推移有信息到来的投资的最新贡献者。

为利用或有债权分析导出最优投资规则，我们不得不假定来自投资回报的不确定性是建立在现有资产基础上的。达菲和黄（Duffie and Huang，1985）列举了动态生成必须的条件的完全集合；黄和莱茨伯格(Huang and Litzenberger, 1990)、达菲(Duffie, 1992)及多珊(Dothan, 1990)提供了研究生教科书水平上的详细讨论。我们也发现，基本的投资期权与支付股息的股票的永久性看涨期权相似，而且与此类金融期权有相同的特征。关于金融期权的定价与最优执行的详细处理，参见考克斯和鲁宾斯坦(Cox and Rubinstein, 1985)、霍尔(Hull, 1989)或加罗和拉德(Jarrow and Rudd, 1983)的论述，对期权定价方法与结论的评述参见史密斯(Smith, 1976)的论述。

在 V 服从几何布朗运动的基本情形下，我们的结论也在迪克西特（Dixit，1992）和平迪克（Pindyck，1991b）的综述性文章中得到描述和解释，这正是建立本章的基础。而且，默顿（Merton，1977）及梅森和默顿（Mason and Merton，1985）讨论了金融期权与投资决策之间的联系。除非有破产成本，莫迪利安尼-米勒定理成立，因此，企业的实际投资决策独立于其金融结构。

关于新古典投资理论的一般性评论，包括调整成本的意义，参见尼克尔（Nickell，1978）的论述。

【本章注释】

[1] 投资机会类似于支付红利股票的永久性看涨期权。（来自已经完成的项目的回报流等同于股票股利。）这种期权定价和执行问题的解决方法由萨缪尔森（Samuelson，1965）首先发现。

[2] 如果 $a>0$，读者可以证明这一点也满足二阶条件，在当前的情形下为真。

[3] 乔根森（Jorgenson，1963）证明，没有不确定性的条件下，当来自额外单位资本的边际收益等于资本的使用成本时，企业就应当投资。我们感谢朱瑟皮·伯特拉（Giuseppe Bertola）所建议的这种观点。

[4] 根据我们的了解，该观点首先由马戈林（Marglin，1963，Chap.2）提出。

[5] 关于生成及其含义的更严格、更详细的讨论参见黄和莱茨伯格（Huang and Litzenberger，1990）及达菲（Duffie，1992）的论述。达菲和黄（Duffie and Huang，1985）陈述了生成所需要的全部条件集。

[6] 即 $\phi=\frac{r_m-r}{\sigma_m}$，这里 r_m 为市场的预期回报，而 σ_m 为该回报的标准差。如果我们采用纽约证券交易所的指数作为市场，$r_m-r\approx0.08$，而 $\sigma_m\approx0.4$。关于资本资产定价模型的更详细的讨论参见布雷利和迈尔斯（Brealey and Myers，1991）及达菲（Duffie，1992）的论述。

[7] 某一常数支出率 δ 及某一必要的预期回报率 μ，隐含着某一无限生命力的项目。令 π 表示来自项目的收益流：

$$V_0=\int_0^T\pi_t e^{-\mu t}dt=\int_0^T\delta V_0 e^{(\mu-\delta)t}e^{-\mu t}dt$$

这里隐含着 $T\to\infty$。如果项目为有限寿命，式（5-1）不能代表经营期间 V 的演化。然而，它可以代表项目建造前期 V 的演化，这正是投资决策的所有问题。关于这一点更详细的讨论参见马伊德和平迪克（Majd and Pindyck，1987，pp.11-13）的论述。

[8] 由于 $n=F'(V)$ 在这一小段时间内保持固定，我们没有任何包含 $dF'(V)$ 的项。

[9] 这个结论是由考克斯和罗斯（Cox and Ross，1976）首先证明的。而且，注意到式（5-23）是最大化我们所构建的无风险投资组合的净回报的贝尔曼方程。由于投资组合是无风险的，该问题的贝尔曼方程为

$$r\Phi dt=-\delta VF'(V)dt+E(d\Phi) \tag{5-i}$$

即投资组合的回报等于它每期所支付的现金流（这一数值为负，因为为维持空头必须支付 $\delta VF'(V)$），加上预期资本收益率。通过替换 $\Phi=F-F'(V)$，并像以前一样展开 dF，人们可以看到式（5-23）遵循式（5-i）。而且，注意到在式（5-i）中，$\delta=\mu-\alpha$ 而不是 $r-\alpha$，因此，人们仍然必须有一个适用于 V 的经风险调整的预期回报的估计。这正是我们在第

4.3.1讨论的“等价于风险中性的估价”过程的一个例子。

[10] 注意对 $\sigma=0$，如果 $\delta\geqslant 0.04$，我们有 $V^*=1$。这证实了我们先前对乔氏标准的讨论。

[11] 有关金融看涨期权和它们的静态比较的更详细讨论，参见考克斯和鲁宾斯坦（Cox and Rubinstein，1985）及霍尔（Hull，1989）的论述。

[12] 或者，有人可能认为 σ 随时间随机波动，例如，根据均值回归过程：

$$d\sigma=\eta(\bar{\sigma}-\sigma)dt+\xi\sigma dw$$

式中，dw 为维纳过程的增加，它与 dz 不相关。那么投资机会的价值将为两个状态变量 V 和 σ 的函数，而且将满足一偏微分方程。此类问题已经被霍尔和怀特（Hull and White，1987）、斯科特（Scott，1987）及韦金斯（Wiggins，1987）研究过了。

[13] 这一“等待时间”的期望值与方差可以得到系统性计算。我们不需要这些表达式，但是有兴趣的读者可参阅迪克西特(Dixit,1993a,pp.54-57)的简单情形，更严格的理论参见卡林和泰勒(Karlin and Laylor,1981,pp.242-244)或哈里森(Harrlson,1985,pp.11-14)的论述。

[14] 而且除非存在均值回归的回报流，我们没有发展解释为什么 V 是均值回归的模型，V 将有一个低于均衡率 μ 的回报率。关于这一点的讨论参见麦克唐纳和西格尔（McDonald and Siegel，1984）的论述。

[15] 关于合流超几何函数及其特征的讨论，参见阿布拉莫维茨和斯蒂冈（Abramowitz and Stegun，1964）、皮尔逊（Pearson，1990，Section 7.9），或者斯莱特（Slater，1960）的论述。

[16] 如果 $\phi=1$（因此，事件是 V 下降到零，并且永远保持），式(5-40)简化成二次方程，它就像我们前面的方程，除了在常数项将泊松过程的参数加到利率中外，其正解为

$$\beta_1=\frac{1}{2}-\frac{r-\delta}{\sigma^2}+\sqrt{\left(\frac{r-\delta}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2(r+\lambda)}{\sigma^2}}$$

[17] 默顿（Merton，1976）推导出不支付股息的股票的看涨期权的价值公式，这种股票的价格遵守混合的布朗运动/泊松跳跃过程，并且证明，如果“事件”是股票价格确实下降为零，初始的布莱克-斯科尔斯（Black-Scholes，1973）的公式适用，但是由 $r'\equiv r+\lambda$ 替代了无风险利率 r。他保持股票的预期资本收益率为一常数，即用 $\alpha+\lambda$ 代替了漂移率 α，则 λ 的增加将提高期权的价值。

第6章 项目价值与投资决策

上善若水股票论坛 bbs.jiaogu.com

第 5 章中不可逆投资的基本模型论证了企业的投资期权与金融看涨期权非常类似。在看涨期权的情形下，作为期权标的的股票价格被假定为服从指定的外生性随机过程，经常是一种几何布朗运动。在我们关于实际投资的模型中，相应的状态变量是项目的价值 V，我们为它规定了一种外生性的随机过程。

然而，正如我们在第 5 章开始时所解释的，令 V 服从某种外生的随机过程，特别是几何布朗运动，这是对现实的一种抽象。(1) 如果项目是一家工厂，而且存在可变经营成本，V 将不服从几何布朗运动。(2) 更重要的是，项目价值取决于投入与产出的未来价格及利率等。这些因素依次可以根据各种市场中的潜在需求和技术条

件得到解释。因此，V 的波动可追溯到这些更基本的变量的不确定性上。V 到底能到什么深度取决于分析的目的。为了理解企业的行为，使用投入与产出的外生性随机过程应该能满足我们的需要。在产业水平上，我们必须使产出价格内生化。在更一般的均衡水平上，投入品价格也必须通过同时考虑所有产业内的要素需求来决定。在本章中，我们沿这条思路进行初步的尝试。

在本章，我们考虑一家对能产生给定产出流的单个离散项目拥有优先机会或垄断权力的企业。基本的不确定性是该产出的需求，但是我们给出了固定的规模，这样，在需求与价格之间就有了直接联系。因此，我们令产出价格 P 为外生的，根据指定的 P 的随机过程来决定项目的价值 V 及投资期权的价值 F。我们的分析方法与第5章所采用的一样，即或有债权分析或动态规划。我们将再一次看到，投资期权的价值包括持有的贴息，它意味着对投资的检验比传统的马歇尔标准更困难。 176

在第6.1节，我们从最简单的情形开始，其中生产没有经营成本，则一项已完成项目的价值正好是其收益流的贴现现值，第5章关于 V 的公式立即转换成关于 P 的相应公式。

在第6.2节，我们引入经营成本 C。因此，项目在每期将产生等于 $(P-C)$ 的经营利润流。这就提出了一个新问题——产出价格可以经常低于 C，这可能使经营利润为负值。我们必须详细说明随后会发生什么。我们考虑两种有些极端的可能性。第一种可能性，即本章的主题，如果 P 下降到低于 C，项目可以被无成本地关闭；如果 P 上升到高于 C，项目可在以后无成本地重新开始。实际上，这使得项目成为一个包括立即经营期权的无限序列。第二种极端的可能性，假定如果经营曾经重新开始，必然重新招致全部投资成本 I，从而禁止此类临时性的推迟，我们将在第7章考虑这种极端的可能性。因此，为保持未来经营的期权的活力，一些损失必将存在。但是，如果损失大幅上升，项目将被放弃。当然，现实情况是介于这两种极端情形之间。如果经营延缓，一般来说，正在进行的项目所提高的特定资产（如工人的技能、客户的忠诚等）将逐渐消失或"冻结"。这样，重新开始包括了一定的成本，但是这个成本低于重建一个新项目的成本，而差异取决于产品的特征及延缓的期限。我们对两种极端情形的分析所产生的结论可以适当地结合并适应存在于两者之间的特定应用。

在第6.3节，我们考虑一些诸如劳动力及原材料之类的投入品的瞬时变动，从而改变来自项目的产出流以适应瞬时的价格波动。现在利润流变成价 177

格的非线性函数，它改变了不确定性对投资的影响。

在这之前，所有的分析都假定项目一旦启动，将永远持续地制造产出流。作出这种不现实的假定仅仅是为了以简单的方式来阐述期权价值的基本观点。在第6.4节，通过引入折旧放松了这种假定。我们表明，对期权价值的影响不是取决于一个项目的死亡速度，而是如何详细地说明企业在其初始项目已经面临结束时可获得的机会。我们还说明，即使以相当快的速度贬值，期权价值仍然具有相当可观的显著性。

在本章的小结部分，我们考虑了这样一种情形，影响企业投资决策的两个变量（产出价格和投资成本）都是随机的。这里投资期权的价值为这两个独立变量的函数，因此，它满足某一偏微分方程。一般地，这些方程非常复杂，需要通过数值来求解。特殊的齐次方程有助于我们将问题简化为常微分方程并解析性地对它求解。现在只有当产出价格与投资成本的比率超过了由等待的期权价值所影响的临界值时，投资才是最优的。

纵观本章，当我们在模型中引入新特征时，我们从第5章的分析中所获得的有关期权价值的知识仍然有效且有价值，那里详细说明的数学知识仍然是有用的。在后面的章节，我们将继续推广这个模型，并提出新问题。在第7章，我们将考虑如果项目现金流变成负值时，临时性封存或永久性放弃这一项目。在第8章和第9章，我们将转移到产业均衡的水平上来，其中每家企业拥有投资单个项目的机会。在第10章，我们将回到单个企业的视角，但是一般化项目的特征使项目由许多投资步骤组成，在利润流开始产生之前所有步骤都必须完成。最后，在第11章，我们考虑增量投资，一旦项目启动，增加投资的每一单位生产能力就开始产出其边际收益。

6.1 最简单的情形：没有经营成本

在本节中，企业的投资项目一旦完成，将永远产出固定的产出流。为方
178 便起见，我们选择来自项目产出的数量为每年1单位。假定根据数量 Q 给出的价格的反需求函数为 $P = YD(Q)$，这里 Y 为随机移动变量。在本节，假定生产的可变成本为零，企业的利润流正好是 $P = YD(1)$。为不失一般性，我们可以将 P 自身看做随机变量。

在本章，我们将假定 P 为最简单的随机过程，和一个非常接近第5章

的分析框架，即几何布朗运动：

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz \tag{6-1}$$

式中，利润流永远为 P，其预期值以速率 α 增长。如果未来收益以利率 μ 贴现、当前价格为 P 时，项目的预期现值 V 由 $V=\frac{P}{\mu-\alpha}$ 给出。在这种情形下，V 作为 P 的常数乘数也服从参数为 α 与 σ 的相同几何布朗运动。因此，投资问题退化为在第 5 章研究过的模型，但是我们将直接根据 P 来重新讨论，以便为即将进行的推广设定一个平台。

6.1.1　经风险调整的回报率

资本资产定价模型允许我们决定经风险调整的贴现率 μ。为做到这一点，需要将 P 的随机波动"扩展"到金融市场，即存在某种可交易的资产，或者人们可以构建资产的一种动态组合，它恰好与 P 完全相关。为简化说明，我们假定项目产出可直接交易。在这种情形下，贴现率 μ 是 P 的经风险调整的预期市场回报率。如第 5 章所述，我们有 CAPM 公式：

$$\mu = r + \phi\sigma\rho_{pm} \tag{6-2}$$

式中，r 为适用于无风险现金流的贴现率；ρ_{pm} 为跟踪 P 的资产与整个市场组合间的相关系数；ϕ 为市场价格或风险。由于项目价值 V 所受的限制，必须有 $\mu>\alpha$。与第 5 章一样，将用 δ 来定义差异 $\mu-\alpha$。

只有从投资中获得的预期总回报率为 μ 时，投资者才会保持产出或资产与 P 完全相关。这样，α 以预期资本收益的形式出现。剩余的 δ 必须与诸如股息之类的东西一样增长。如果项目的产出为可储存的商品（例如，石油或铜），δ 将代表来自存储的边际便利收益，即边际存储单位所提供的收益流（减去存储成本）。[1]一般地，我们令 δ 为指定的外生参数。然而，在实践中，便利收益可以变化（在时间上是随机的，且/或适应诸如总存储量之类的市场范围的变量），而且我们的模型可以用来说明这一点。[2] 179

当一些基本参数变化时，必须保持均衡关系 $\mu-\alpha=\delta$ 成立，但是重新恢复均衡时对这三个参数值的调整取决于潜在的技术与行为。假定无风险利率 r 及风险的市场价格 ϕ（作为全部市场的特征）对我们的分析来讲都完全是外生性的。现在，当资产 P 增加时，μ 必须提高。若 δ 为一基本的市场常数，则 α 必须变化，以便与 μ 一一对应。然而，如果 α 为基本市场常数，则必须调整 δ，因为存货的总量可能会变化。当研究 σ 的变化对企业投资决

上善若水股票论坛 bbs.hnaogu.com

策的影响时，我们的答案将取决于采纳这些观点中的哪一种。一般地，我们将把 δ 看做基本参数，并调整 α。当其他规则导致不同的重要结论时，我们会把它指出来。

6.1.2 项目评价

我们的项目是一种或有资产或衍生资产，其回报取决于更基本的资产 P 的价值。我们可以推导出项目的价值为基本资产价格的函数 $V(P)$。我们沿袭在第4章及第5章不同背景下所讨论过的或有债权的定价过程。我们将需要定价的资产(项目)与基本资产(P)的适当组合，构建成一种无风险的投资组合。由于这一投资组合是无风险的，它必须获得无风险的回报率，这一条件导出了项目的未知价值的微分方程。然后，该方程可以在给定的适当边界条件下求解。

180 假定在时刻 t 构造了一种投资组合，该组合包括1单位的项目及 n 单位的产出空头，这里选择 n 使得投资组合为无风险的。考虑在很短的时间区间（t，$t+\mathrm{d}t$）内持有这一投资组合。

项目的持有者将在时间区间 $\mathrm{d}t$ 内获得收益或利润流 $P\mathrm{d}t$。另外，单位空头的持有者必须向相应的多头持有者支付，数额相当于后者可能获得的股息或便利收益，即 $\delta P\mathrm{d}t$。这样持有该组合产生的净股息为$(P-nP)\ \mathrm{d}t$。它也产生一定的（随机的）资本收益，这一资本收益等于：

$$\mathrm{d}V-n\mathrm{d}P=\{\alpha(P)P[V'(P)-n]+\frac{1}{2}\sigma(P)^2P^2V''(P)\}\mathrm{d}t+P[V'(P)-n]\sigma(P)\mathrm{d}z$$

(注意我们已经利用伊藤引理在定价过程意义上解释 $\mathrm{d}V$。)现在挑选以便消去含有 $\mathrm{d}z$ 的项，从而该组合变成无风险的情形。[3]因此，投资组合的总回报为

$$\left[P-\delta PV'(P)+\frac{1}{2}\sigma^2P^2V''(P)\right]\mathrm{d}t$$

令上式等于无风险回报 $r[V(P)-nP]\mathrm{d}t$，合并同类项，有微分方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2P^2V''(P)+(r-\delta)PV'(P)-rV(P)+P=0 \qquad (6-3)$$

简单变换表明，方程的齐次部分为 $V(P)=AP^{\beta}$ 的解，假定 β 为下面的基本二次方程的根：

$$Q\equiv\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)+(r-\delta)\beta-r=0 \qquad (6-4)$$

这在第 5 章是非常熟悉的。在那里，我们给出了方程的根及这些根对三个参数 r，δ 与 σ 的依赖性的详细说明。对我们当前的目的来讲，最重要的是给 181
出了经济条件 $r>0$ 且 $\delta>0$，两个根满足 $\beta_1>1$，$\beta_2<0$。

方程的齐次部分的一般解为两个独立解 $B_1P^{\beta_1}$ 和 $B_2P^{\beta_2}$ 的组合。我们将方程的任一特解加到前面去，最容易找到的解为 $\frac{P}{\delta}$。因此，有

$$V(P)=B_1P^{\beta_1}+B_2P^{\beta_2}+\frac{P}{\delta}$$

式中，B_1，B_2 为待定常数。

6.1.3　基本泡沫与投机性泡沫

解中 $\frac{P}{\delta}$ 项可直接解释如下：它正好是初始水平为 P 时，收益流 P_t 的预期现值。这是因为 $E[P_t]=Pe^{\alpha t}$，用适当的经风险调整的利率 μ 来贴现，给出下式：[4]

$$\int_0^\infty Pe^{\alpha t}e^{-\mu t}\mathrm{d}t=\frac{P}{\mu-\alpha}=\frac{P}{\delta}$$

这可以称为项目价值的基本成分，在某种意义上，它是由预期利润流来调整的。另两项必然是价值的投机性成分。出于排除投机的经济考虑，可以忽略它们。

首先，要使项目价格的基本成分有意义，必须使 $V(0)=0$。如果价格在几何布朗运动式（6－1）中曾经为零，它将永远保持为零；用技术术语来讲，零为该过程的吸收壁。在没有期望利润流的条件下，资产会有零价值。然而，由于 $\beta_2<0$，当 $P\to0$ 时，P 的幂趋于无穷。为防止分叉值，必须将相应的相关系数设定为 $B_2=0$。

另一项 $B_1P^{\beta_1}$ 不容易处理。当 $P\to\infty$ 时，它代表了对投机性泡沫有吸引力的 V 的成分，如果人们预期以后能以有效资产回报再次出售它，则他们可能估计资产价值超过其基本价值，这正是第一项可以确保的。

为说明这一点，我们证明始终定价于 P^{β_1} 的一项资产单从其预期资本收益中就产生了适当的经风险调整的回报。利用伊藤引理，我们有 182

$$\frac{\mathrm{d}(P^{\beta_1})}{P^{\beta_1}}=\frac{\beta_1P^{\beta_1-1}\mathrm{d}P+\frac{1}{2}\beta_1(\beta_1-1)P^{\beta_1-2}\sigma^2P^2\mathrm{d}t}{P_1^{\beta}}$$

$$=[\beta_1\alpha+\frac{1}{2}\beta_1(\beta_1-1)\sigma^2]\mathrm{d}t+\beta_1\sigma\mathrm{d}z$$

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

$$= \{r + (\mu - r)\beta_1\}\mathrm{d}t + \beta_1\sigma\mathrm{d}z$$
$$= \{r + \phi\beta_1\rho_{pm}\sigma\}\mathrm{d}t + \beta_1\sigma\mathrm{d}z$$

式中第二行来自如下事实，即 β_1 满足齐次方程 $Q=0$；最后一行利用了 CAPM 公式（6-2）。这样 P^{β_1}回报的标准差刚好为 P 的标准差的 β_1 倍。P^{β_1}与市场组合的协方差也变成 P 与市场组合的协方差的 β_1 倍。由于协方差与方差都乘以相同的因子，P^{β_1}与市场组合的相关系数和 P 与市场组合的相关系数（即 ρ_{pm}）相同。因此，P^{β_1}经风险调整的回报率为 $(r+\phi\rho_{pm}\beta_1\sigma)$，这实际上是上面最后一行中的预期回报率。[5]

在本章的其余部分，我们将排除此类投机性泡沫，只剩下由上面的直接积分所发现的价值的基本成分，即

$$V(P)=\frac{P}{\delta} \tag{6-5}$$

6.1.4 投资期权定价

一旦我们知道作为当前价格 P 的函数的一个已启动的项目的价值 V，我们就可以利用伊藤引理从 P 的扩散过程得到 V 的扩散过程。原则上，第 5 章的方法使我们可以找到项目中作为 V 的函数的投资期权价值 F。然而，V 的过程的漂移及扩散参数一般非常难以解释，使得解出联系 F 与 V 的微分方程很困难。另一种一般且更简单的方法是利用前面边界条件为最优执行时在临界值成立的 $V(P)$的解，找到作为价格的函数的投资期权 $F(P)$的值。

现在我们对简单项目采用这种方法。再次沿袭或有债权的定价步骤，现
183 在投资组合由投资期权和$n=F'(P)$单位的产出空头组成。沿着与以往相同的步骤，读者可以检验我们所得到的微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2P^2F''(P)+(r-\delta)PF'(P)-rF(P)=0 \tag{6-6}$$

这正像是项目的价值方程式（6-3），当然，期权没有股息或利润流。这是一个二阶齐次线性方程式，因此，其解为任意两个相互独立的解的线性组合，即

$$F(P)=A_1P^{\beta_1}+A_2P^{\beta_2}$$

式中，A_1 和 A_2 为待定常数。这个解在持有期权是最优的价格范围内是有效的。由于较高的价格使投资更具有吸引力，正在被讨论的范围在 0 到投资的临界值 P^*之间，当然 P^*本身作为解的一部分是一个需要确定的未知数。

这样，我们有三个未知数，A_1，A_2 及 P^*，因此求出这个解需要三个条件。

$F(P)$在0点附近的极限行为给我们提供了一个条件。P 很小时，它上升至执行临界值 P^* 的前景非常遥远。因此，期权在这种极端情形下几乎没有价值了。为确保 $P \to 0$ 时 $F(P) \to 0$，我们将设定 P 的负幂的系数等于零，这样有 $A_2=0$。

关于其他两个条件，我们考虑$F(P)$在点 P^* 的行为。在这一临界值，执行期权是最优的，因此，通过生成投资 I 的执行价格（沉没成本）可以获得价值为$V(P)$的资产（该项目）。正如在第5章中，两个条件主导了这一点。(1) 期权的价值必须等于通过执行期权获得的净值，这就是价值匹配原则：

$$F(P^*)=V(P^*)-I \tag{6-7}$$

(2) $F(P)$与 $V(P)-I$ 的图像相切于P^*，这就是平滑粘贴条件：

$$F'(P^*)=V'(P^*) \tag{6-8}$$

利用$F(P)$与 $V(P)$的特定函数形式，我们能将价值匹配条件和平滑粘贴条件写为

$$A_1(P^*)^{\beta_1}=\frac{P^*}{\delta}-I$$

$$\beta_1 A_1(P^*)^{\beta_1-1}=\frac{1}{\delta}$$

这可以得到 184

$$P^*=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}\delta I \tag{6-9}$$

为方便参考，我们也说明 A_1 的解，即

$$A_1=\frac{(\beta_1-1)^{\beta_1-1}I^{-(\beta_1-1)}}{(\delta\beta_1)^{\beta_1}} \tag{6-10}$$

利用关系式（6-5），我们可以根据价格的临界值等价地表示出价值的临界值：

$$V^*=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}I$$

这实际上就是第5章中的式（5-4）。这样我们根据基本价格得出的标的资产的项目价值及期权价值与我们直接从项目价值出发所获得的结论相同。在现在的情形下，V 是P 的一个常数乘数，直接说明这两种方法的等价性很容易。然而，结论是非常一般化的。一般地，我们发现从 P 的角度开展工

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

作在某种程度上更方便，因为它是经济学中更基本的变量。

第 5 章中所强调的重要观点是 $V^* > I$。等待投资的期权价值隐含着行动的临界值，其中投资的预期价值超过了成本。这里相应的观点是 $\frac{P^*}{\delta} > I$ 或 $P^* > \delta I$。我们可以将 δI 称为投资的流动一等价成本（单位时间），即如果随后的预期价值可以抵消投资成本时，初始利润流必须保持的水平。[6]

在第 5 章中，我们详细讨论了这样一个因子，即“期权价值乘数” $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$，它可以使 V^* 超过 I。我们在参数 r，σ 及 δ 的变化范围内计算了 V^* 的数量。没有必要在这里重复那些观点，但将在本章后面所讨论的更一般的新模型中进行相应的计算。

同样地，在第 5 章我们将托宾 q 值定义为资产价值与重置成本的比率，即 $\frac{V}{I}$。这使我们可以将等待的影响解释为下述情形的可能性：只要 q 仍低于 $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$，即使 q 超过 1 也不发生投资。现在可以同样地定义 $q = \frac{P}{\delta I}$ 并得到相同的解释。

185

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

6.1.5 动态规划

如果 P 的风险不能由现有资产来生成，就不能构造无风险的投资组合并利用它来得到关于 $V(P)$ 的微分方程。正如我们在第 4 章及第 5 章已经解释过的，实际上可以利用具有外生指定的贴现率 ρ 的一个动态规划，尽管我们不能利用 CAPM 使这一贴现率与无风险利率及市场价格联系起来。下面是这些步骤的一个概括。

项目在时刻 t 的价值可以被解释为在时间区间（t，$t+\mathrm{d}t$）内经营利润的数量及 $t+\mathrm{d}t$ 后的持续价值。这样

$$V(P) = P\mathrm{d}t + E[V(P+\mathrm{d}P)\mathrm{e}^{-\rho \mathrm{d}t}]$$

利用伊藤引理扩展等式左边，我们有

$$V(P) = P\mathrm{d}t + [\alpha P V'(P) + \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''(P)]\mathrm{d}t + (1-\rho\mathrm{d}t)V(P) + o(\mathrm{d}t)$$

式中，$o(\mathrm{d}t)$包括了比 $\mathrm{d}t$ 更快地趋于零的项。简单地，对上式除以 $\mathrm{d}t$，并

对 $dt \to 0$ 时求极限，得到微分方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''(P) + \alpha P V'(P) - \rho V(P) + P = 0$$

除了 r 由（任意的）贴现率 ρ 替代、$(r-\delta)$ 由 α 替代外，这与我们在前面所得到的式（6－3）非常相像。可以用同样的方法来求解方程，并排除泡沫解，我们得到 $V(P)=\frac{P}{\rho-\alpha}$。为了保证这两个解在经济上有意义，我们要求 $\rho>\alpha$。

那么，投资期权也可以进行类似分析。从 P 在范围 $(0, P^*)$ 内开始，期权一直被持有。将未来划分为瞬时时间区间 $(t, t+dt)$ 和超过该区间的延续部分，像上面一样展开并化简，得到微分方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F''(P) + \alpha P F'(P) - \rho F(P) = 0$$

现在考虑二次方程

$$Q \equiv \frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta-1) + \alpha\beta - \rho = 0$$

由于 $\rho>\alpha$，这一方程较大的根 β_1 超过了1。由于 $\rho>0$，另一根 β_2 为负，则期权价值的解有 $F(P)=A_1 P^{\beta_1}$ 这样的形式，其中 A_1 为待定常数。

最后，在点 P^* 利用价值匹配和平滑粘贴条件来完成对 $F(P)$ 和 $V(P)$ 的 186
求解。结果为

$$P^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}(\rho-\alpha) I$$

这是前面式（6－9）的自然模拟。

在本章其他部分，我们假定资产复制存在并采用或有债权方法，而将使用动态规划时所应用的明显的修正留给读者。有时候，为了变通和简化说明，我们也会采取相反的办法。

6.2 经营成本与临时推迟

再次假定产出价格服从式（6－1）中的几何布朗运动。则 α，σ，μ 及 $\delta \equiv \mu - \alpha$ 均为常数。如果投资于项目的期权曾经将要执行，我们需要有 $\mu>\alpha$，或者 $\delta>0$，假定这正是实际的情形。我们还将假定项目的经营所需成本流为 C，但是当 P 下降到低于 C 时，经营可以被临时地或无成本地推迟，

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

而且如果以后 P 上升到高于 C 时，经营可以被无成本地恢复。因此，在任意时刻来自该项目的利润流由式（6-11）给出：

$$\pi(P)=\max[P-C,0] \tag{6-11}$$

麦克唐纳和西格尔（McDonald and Siegel，1985）指出了考察这种项目的另一条有用途径，它给予项目所有者一个无限期权的集合。在时刻 t 的期权如果被执行，则意味着支付 C 以获得在当时盛行的 P。由于每种期权仅能在特定的时刻被执行，这些期权被称为欧式看涨期权。[7]他们还表明，通过（利用标准的布莱克-斯科尔斯公式）评价这些期权中的每一个，然后利用在 t 的积分把这些价值加总，项目就可以被定价。我们发现，把项目看做依赖于 P 的简单的或有债权比较容易评价项目。下面，将完成求解 $V(P)$ 的步骤，在后面，将转到投资期权定价的问题上去。

187 ### 6.2.1 项目价值

我们再来考虑由 1 单位项目及价格为 P 的资产的 $n=V_P(P)$ 单位空头所组成的投资组合。在很短时间区间（t，$t+\mathrm{d}t$）内持有该组合时，该组合所有者可以执行当前的经营期权。如果 $P>C$，这是有盈利的；最终利润流的增长刚好为 $\pi(P)=\max(P-C,0)$。这种投资组合的其他方面（资本收益、空头的股息支付等）与以前相同。因此，该项目价值的微分方程为

$$\frac{1}{2}\sigma^2P^2V''(P)+(r-\delta)PV'(P)-rV(P)+\pi(P)=0$$

这可以用类似的方法来求解。齐次部分有两个与前面完全相同的独立解 P^{β_1} 和 P^{β_2}。惟一的新特征在于非齐次部分，或强制函数 $\pi(P)$，在 $P<C$ 和 $P>C$ 时有不同的定义。因此，我们对 $P<C$ 和 $P>C$ 解方程，并且在 $P=C$ 点将这两个解结合起来。

在 $P<C$ 区域内，我们有 $\pi(P)=0$，所以只有方程的齐次部分存在。因此，一般解为以两个根为幂的线性组合：

$$V(P)=K_1P^{\beta_1}+K_2P^{\beta_2}$$

式中，K_1 和 K_2 为待定常数。在区域 $P>C$，我们采用齐次部分解的另一线性组合，并且加上整个方程的任意一个特殊解。一个简单的替换，表明 $\left(\frac{P}{\delta}-\frac{C}{r}\right)$ 满足方程。因此，对 $P>C$，一般解为

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

$$V(P)=B_1P^{\beta_1}+B_2P^{\beta_2}+\frac{P}{\delta}-\frac{C}{r}$$

式中，B_1，B_2 为待定常数。

这些解有简明的经济学解释。在区域 $P<C$，经营被推迟，项目不产生当前利润流。然而，当经营恢复且产生利润时，价格过程在未来某一时间移动到 $P>C$ 的区域内的概率大于零。当 $P<C$ 时，价值 $V(P)$ 正好是这种未来利润流的预期现值。

接下来，考虑 $P>C$ 的区域。假定在某一时刻，企业被迫永远持续经营该项目，即使风险性收益下降到低于 C 的时间区间也一样。这种项目的净价值是什么？预期的收益流以 α 比率增加，并且以适当的经风险调整的利率 μ 贴现，因此，预期现值为 $\frac{P}{\mu-\alpha}=\frac{P}{\delta}$，确定的常数成本流 C 以无风险利率 r 进行贴现，产生的现值为 $\frac{C}{r}$，净值 $\left(\frac{P}{\delta}-\frac{C}{r}\right)$ 构成了上述解的后两项。由于除了损失外该解对持续经营不产生任何要求，因此另外两项必须是当 P 下降到低于 C 时未来推迟经营的期权的额外价值。 188

解中常数由在区域边界要考虑的事项来确定。从 $P<C$ 开始。当 P 非常小时，除非在遥远的未来，P 提高到超过 C 变得不可能。这样未来利润的预期现值将趋于零，因此项目的价值也趋于零。然而，在 β_2 为负时，当 $P\to 0$ 时，$P^{\beta_2}\to\infty$。因此，常数（即 K_2）乘以这一项应当为零。现在转到 $P>C$。当 P 非常大时，除非在遥远的未来，推迟期权不可能实施，因此，其价值应为零。正因为如此，我们通过令 $B_1=0$ 来排除 P 的正幂。[8] 于是有

$$V(P)=\begin{cases}K_1P^{\beta_1}, & P<C\\ B_2P^{\beta_2}+\frac{P}{\delta}-\frac{C}{r}, & P>C\end{cases} \tag{6-12}$$

这样还剩下两个常数，我们下面考虑 $P=C$ 上的点，在这一点两个区域相交。由于 P 的布朗运动可以围绕这一边界自由分散，价值函数不能在边界上突然改变。实际上，解 $V(P)$ 关于 C 必须是连续可微的。一个有启发性的探讨参见迪克西特（Dixit，1993a，Section 3.8）的论述；在卡拉扎斯和施里夫（Karatzas and Shreve，1988，Theorem 4.4.9）的论述中也有一个严格的证明。令两个组成部分在点 C 的解的值和导数相等，我们有：

$$K_1C^{\beta_1}=B_2C^{\beta_2}+\frac{C}{\delta}-\frac{C}{r}$$

$$\beta_1 K_1 C^{\beta_1 - 1} - \beta_2 B_2 C^{\beta_2 - 1} + \frac{1}{\delta}$$

189 这是未知数 K_1 和 B_2 的两个线性方程。很容易求出两个解：

$$K_1 = \frac{C^{1-\beta_1}}{\beta_1 - \beta_2}\left(\frac{\beta_2}{r} - \frac{\beta_2 - 1}{\delta}\right) \tag{6-13}$$

$$B_2 = \frac{C^{1-\beta_2}}{\beta_1 - \beta_2}\left(\frac{\beta_1}{r} - \frac{\beta_1 - 1}{\delta}\right) \tag{6-14}$$

由于关于 K_1 的项包括了来自未来恢复经营的期权的预期利润，而关于 B_2 的项是未来推迟期权的价值，因此这两个常数都为正。为此，我们需要有

$$r > \beta_1(r-\delta)$$
$$r > \beta_2(r-\delta)$$

为证明这两点，求二次式 $Q(\beta)$ 在 $\beta = \frac{r}{r-\delta}$ 的值。我们有

$$Q\left(\frac{r}{r-\delta}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 r\delta}{(r-\delta)^2} > 0$$

因而 $\frac{r}{r-\delta}$ 或者位于较大的根 β_1 的右边或者较小的根 β_2 的左边。首先假定 $r > \delta$，因而 $\frac{r}{r-\delta} > 0$，则

$$\frac{r}{r-\delta} > \beta_1 > \beta_2$$

这是我们已经证明过的。下面，假定 $r < \delta$，因此 $\frac{r}{r-\delta} < 0$，则

$$\frac{r}{r-\delta} < \beta_2 < \beta_1$$

上式乘以负数 $(r-\delta)$，改变了不等式的方向，我们再次得到期望的结果。

数值例子有助于说明该解。除非特别声明，我们令 $r = \delta = 0.04$ 及 $C = 0$。图 6—1 显示了 $V(P)$ 作为 P 的函数在 $\delta = 0, 0.2$ 及 0.4 时的图像。当 $\sigma = 0$ 时，不存在 P 在未来上升的可能性，因此，对 $P < 10$，项目将永不生产（且没有价值）。如果 $P > 10$，$V(P) = \frac{P-10}{0.04} = 25P - 250$。然而，如果 $\sigma > 0$，只要 $P > 0$，项目始终有一定价值；尽管企业现在可能不生产，它在将来某一点也会生产。另外，由于未来利润向上的潜力是无限的，而利润向下的潜力的极限为零，因而 σ 越大，未来预期利润流也越大，$V(P)$ 也越大。

图 6—2 显示了在 $\sigma = 0.02$ 及 $\delta = 0.02, 0.04$ 及 0.08 时的 $V(P)$。对任何固定的经风险调整的贴现率，更高的 δ 值意味着更低的预期价格增长率以

bbs.miaogu.com 上善若水股票论坛

及更低的项目价值。 190

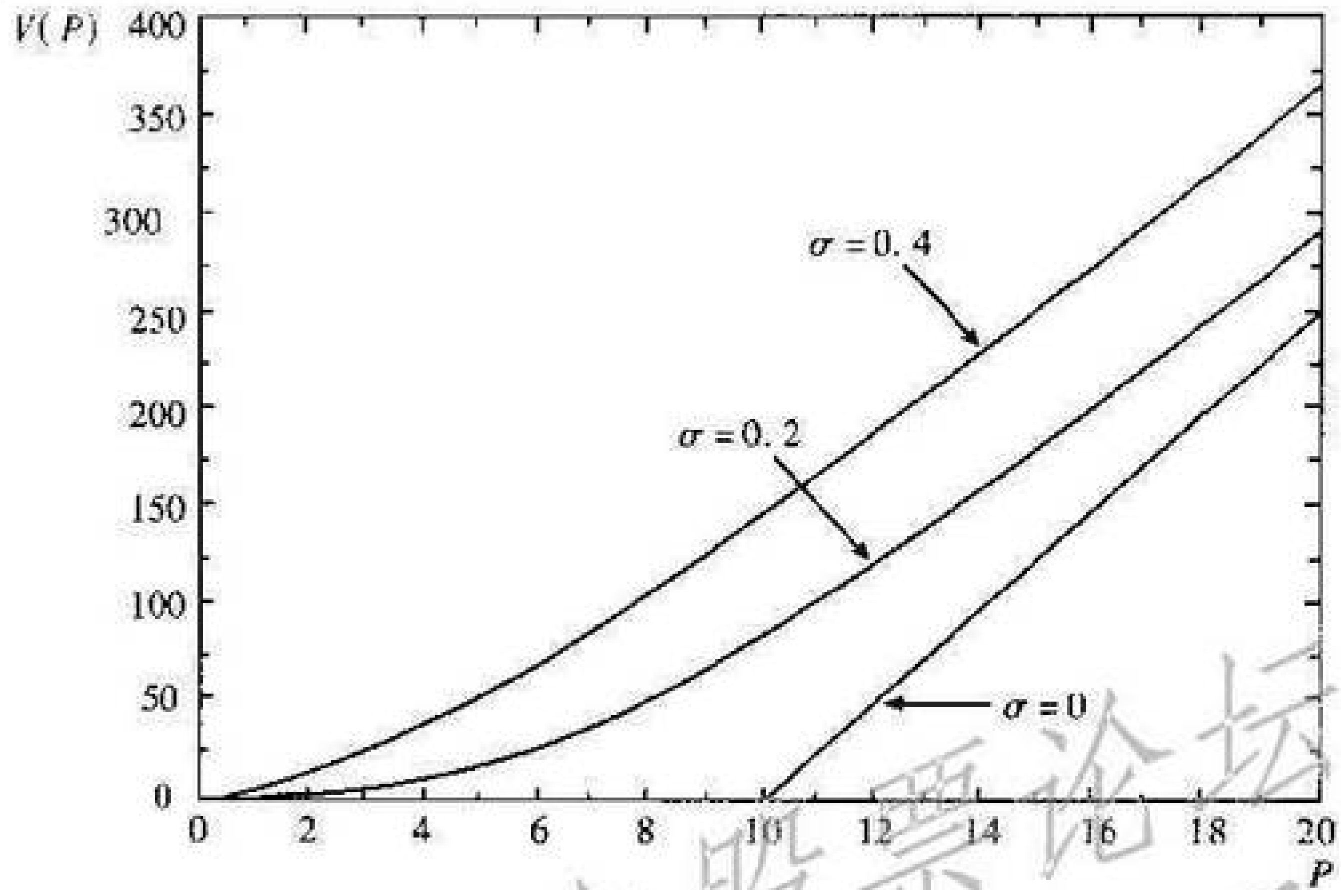


图 6—1　项目价值 V（P），σ = 0，0.2 和 0.4

（$r=\delta=0.04$，$\delta=0.2$ 且 $C=10$）

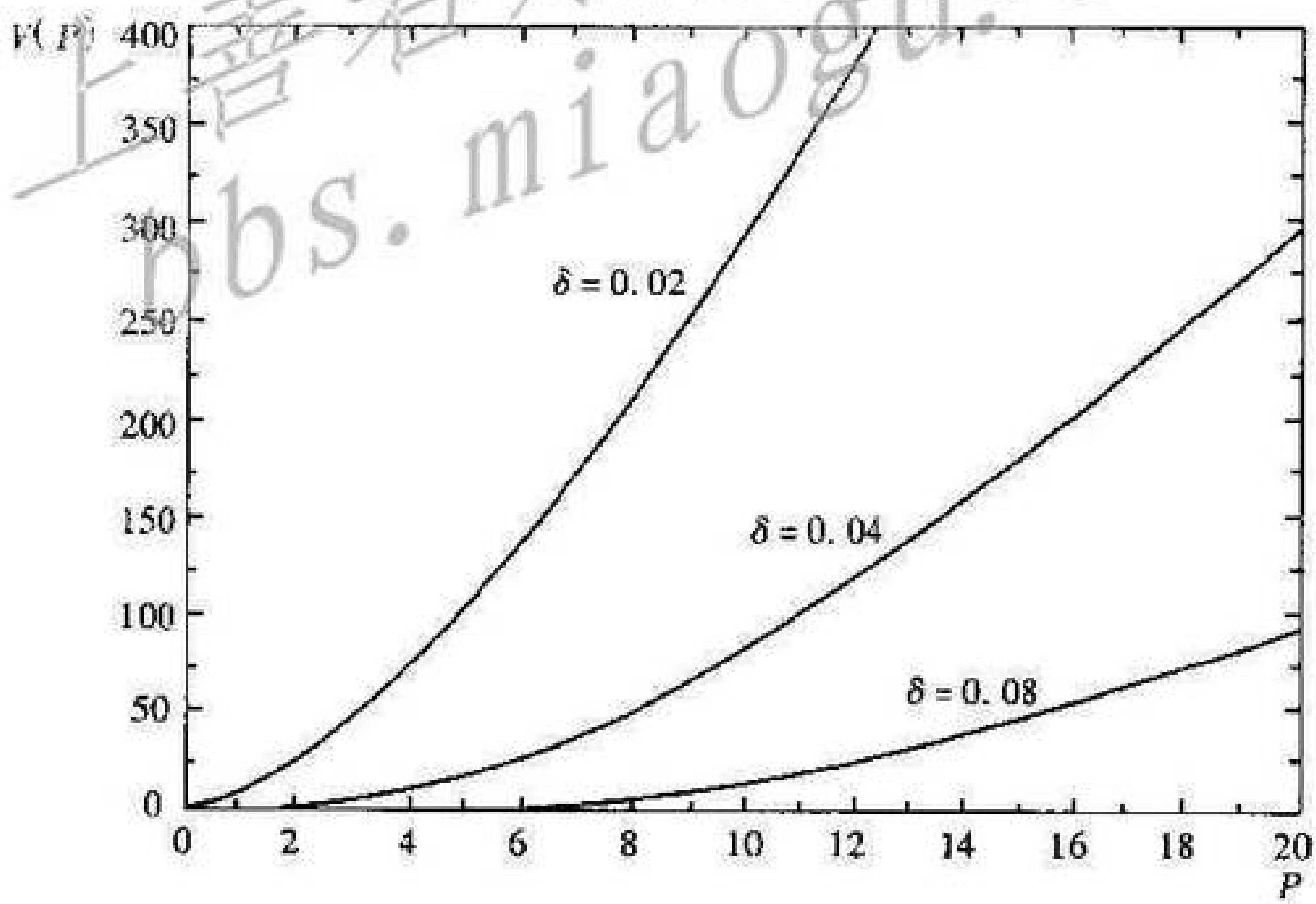


图 6—2　项目价值 V（P），σ = 0.02，0.04 和 0.08

（$r=0.04$，$\sigma=0.2$ 且 $C=10$）

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

6.2.2 投资期权的价值

现在知道了项目价值$V(P)$，可以发现项目投资期权的价值$F(P)$,以及最优投资规则。由于价格P服从几何布朗运动式（6－1），我们可以重复与前面相同的步骤来建立下述形式的投资期权价值：

$$F(P)=A_1P^{\beta_1}+A_2P^{\beta_2}$$

由于$P=0$为吸收壁，因而$F(0)=0$。我们知道$A_2=0$,在最优执行点P^*,有把$F(P)$与式(6－12)中适当的$V(P)$联系起来的价值匹配及平滑粘贴条件。当然,当$P<C$时,投资期权不会被执行;若仅仅使项目在一定时间内空闲,没有理由会产生投资成本I。这可以正式地证明:$A_1P^{\beta_1}$不满足$K_1P^{\beta_1}-I$的价值匹配和平滑粘贴条件。因此,在式(6－12)中,在经营阶段,即$P>C$时,利用关于V
191 (P)的解,则可以给出价值匹配与平滑粘贴条件：

$$A_1(P^*)^{\beta_1}=B_2(P^*)^{\beta_2}+\frac{P^*}{\delta}-\frac{C}{r}-I \tag{6-15}$$

$$\beta_1A_1(P^*)^{\beta_1-1}=\beta_2B_2(P^*)^{\beta_2-1}+\frac{1}{\delta} \tag{6-16}$$

考虑到B_2在式（6－14）中为未知数，因而式（6－15）和式（6－16）可以对A_1和P^*求解。去掉A_1，我们对投资临界值有一个方程：

$$(\beta_1-\beta_2)B_2(P^*)^{\beta_2}+\frac{(\beta_1-1)P^*}{\delta}-\beta_1(\frac{C}{r}+I)=0 \tag{6-17}$$

可以非常简单地求出式(6－17)的数值解,从而给出最优投资规则。首先,读者可以检验,式(6－17)对P^*有大于$(C+rI)$的惟一解,这就是马歇尔完全成本(经营成本加上投资的资本成本的利息);其次,可以检验$V(P^*)>I$，因此，在投资是最优选择之前，项目必然有一个超过零的净现值。

192 回到数值的例子，$r=\delta=0.04$，$\sigma=0.2$及$I=100$时$F(P)$和P^*的解的图像如图6—3所示。该图画出了$F(P)$和$V(P)-I$。考虑到价值匹配条件,P^*满足$F(P^*)=V(P^*)-I$;由平滑粘贴条件知,P^*为两条曲线的切点。

考察σ与δ变化时这些曲线如何变化是非常有用的。正如我们在前面所看到的,σ的上升导致对任意的P都有$V(P)$的提高。(正如我们所解释过的,项目是未来生产的一组看涨期权，价格的波动性越高，这些期权的价值也越大。）然而，尽管σ的增加提高了项目的价值，它也提高了投资为最优选择时的临界价格，即$\frac{\partial P^*}{\partial \sigma}>0$。原因是对任意的$P$，投资期权的价值（从而投

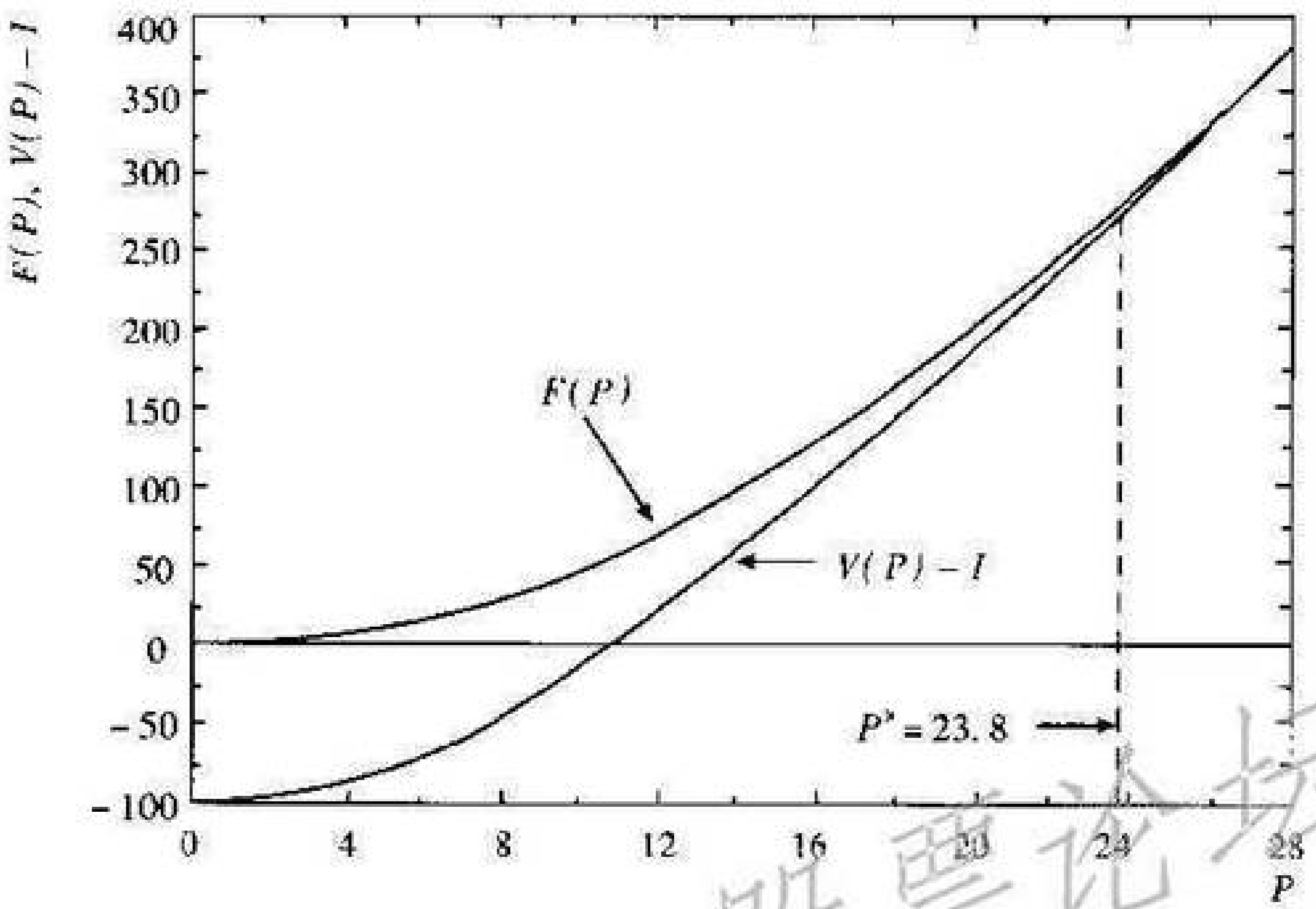


图 6—3 投资机会资的价值 $F(P)$ 与 $V(P)-I$

($r=\delta=0.04$, $\sigma=0.2$ 且 $I=100$)

资的机会成本) $F(P)$比 $V(P)$提高得更多。因而正如第 5 章所发展的较简单模型，提高的不确定性减少了投资。这可由图 6—4 说明，它显示出 $\sigma=0$, 0.2 及 0.4 时的$F(P)$及 $V(P)-I$。当 $\sigma=0$ 时，临界价格为 14，它使项目的价值正好等于其成本 100；随着 σ 上升，$V(P)$和 $F(P)$两者都提高。$\sigma=0.2$ 时，$P^*=23.8$；$\sigma=0.4$ 时，$P^*=34.9$。

δ 的提高也会提高企业应当投资时的临界价格 P^*。有两种相反的效应，如果 δ 较大，则 P 的预期增长率较小、未来生产期权的价值较小，因此 $V(P)$ 193
较小。同时，等待投资的机会成本上升($F(P)$的预期增长率较小)，因此对执行期权有更多的激励而不是保持期权存在。第一种效应占优势，因此较高的 δ 导致较高的P^*。这在图 6—5 中得到说明，该图显示了 $\delta=0.04$ 和 0.08 时的$F(P)$和 $V(P)-I$。(在这两种情形下，$r=0.04$ 且$\sigma=0.2$。)注意，当 δ 提高时，$V(P)$从而 $F(P)$迅速下降，在 P^* 的切点向右移动。

初步看，结论似乎与第 5 章的较简单模型的结论相互矛盾。我们可以回忆，在那个模型中，δ 的上升降低了在该点企业应当投资的项目临界价值 V^*。然而，在这个模型中，当 δ 更大时，P^*更高，相应的项目价值

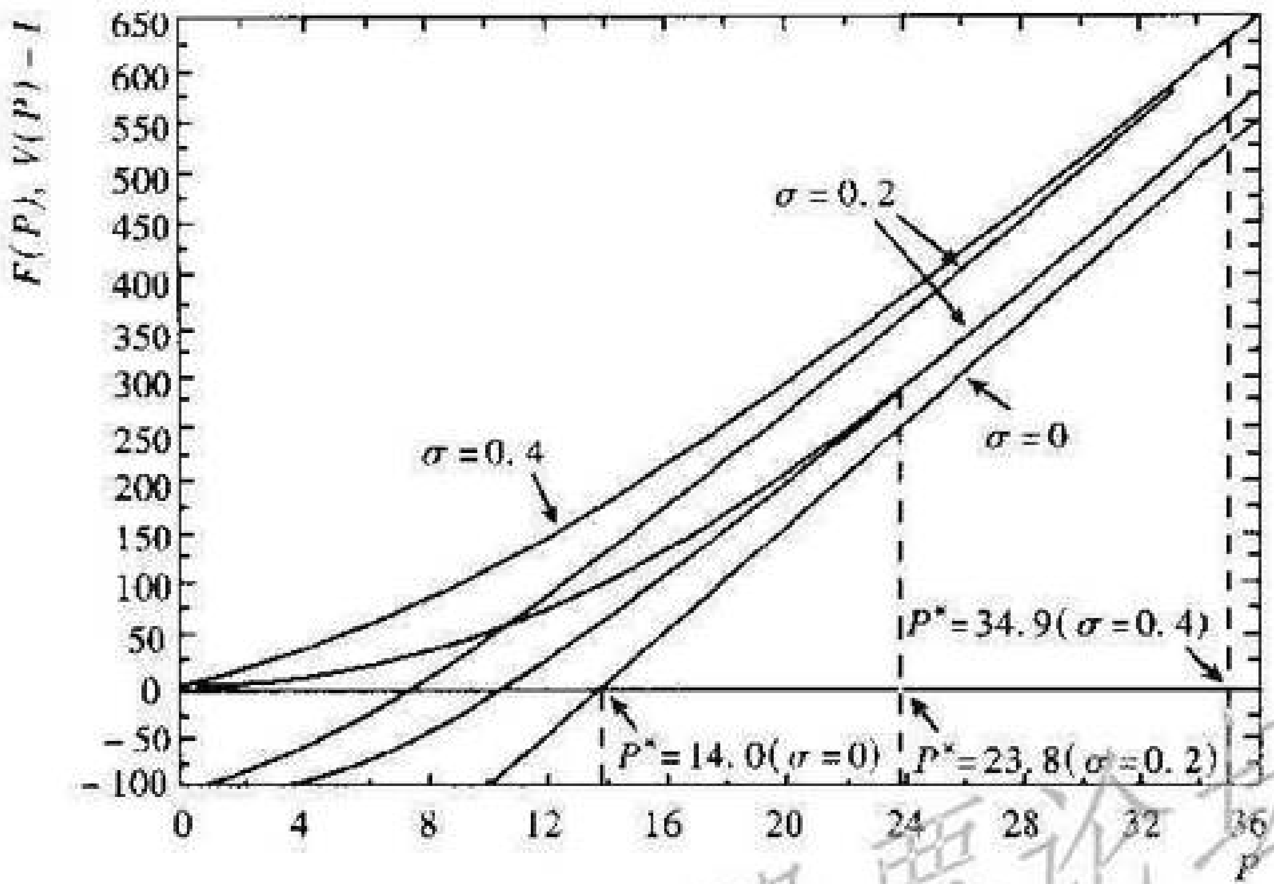


图 6—4　投资机会的价值 $F(P)$ 与 $V(P)-I$，$\sigma=0$，0.2 和 0.4

194

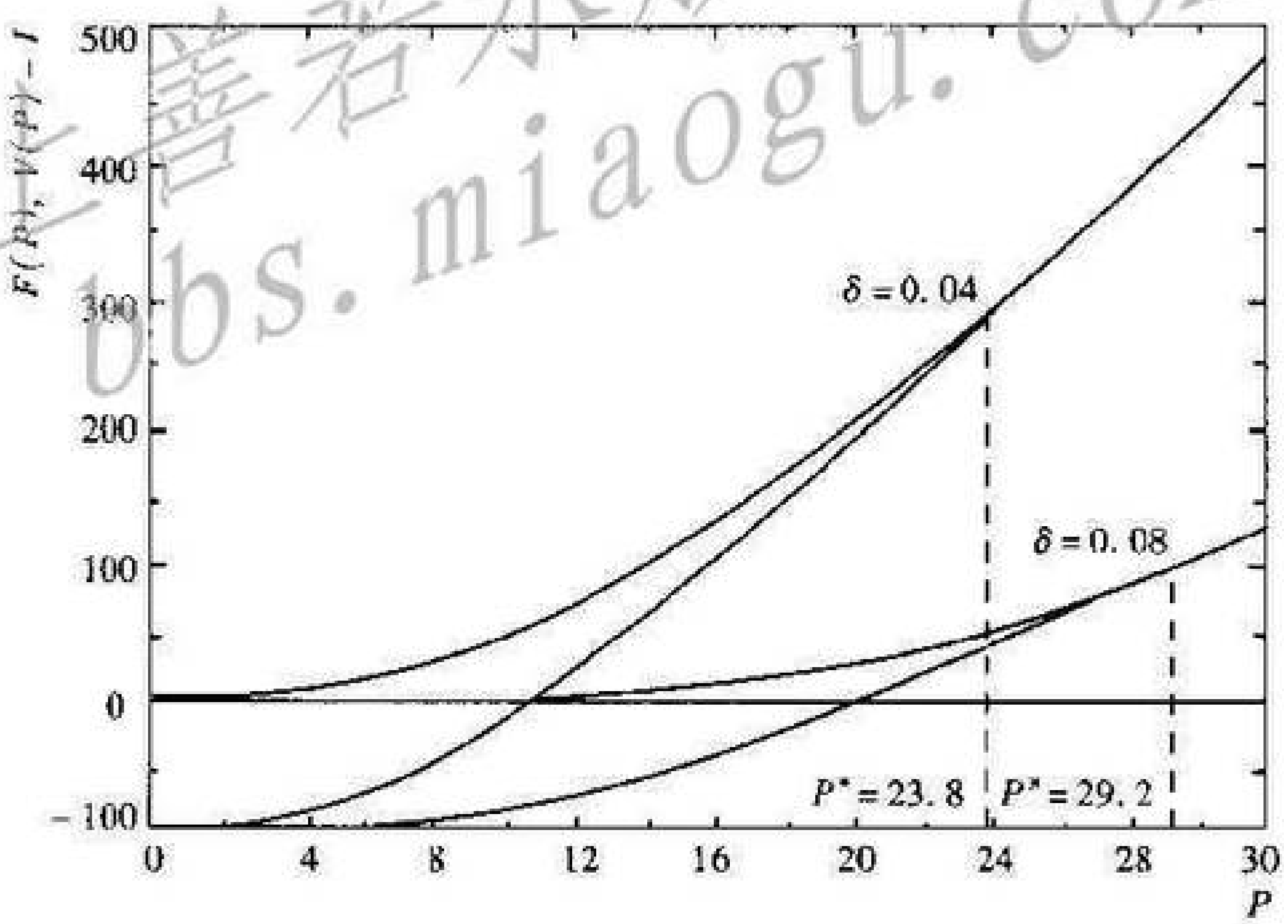


图 6—5　投资机会的价值 $F(P)$ 与 $V(P)-I$，$\delta=0.04$ 和 0.08

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

$V(P^*)$却更低。这在图 6—6 中可以看出，它显示了 $\delta=0.04$ 及 0.08 时 P^*作为 σ 的函数的图像，而图 6—7 显示了 $V(P^*)$。如果假定 $\sigma=0.2$ 且

δ 从 0.04 提高到 0.08，则 P^* 将从 23.8 提高到 29.2，但是，即使在更高的 P^*，V 却更低。这样 $V^* = V(P^*)$ 也会随 δ 的提高而下降，正如最简单的模型一样。

195

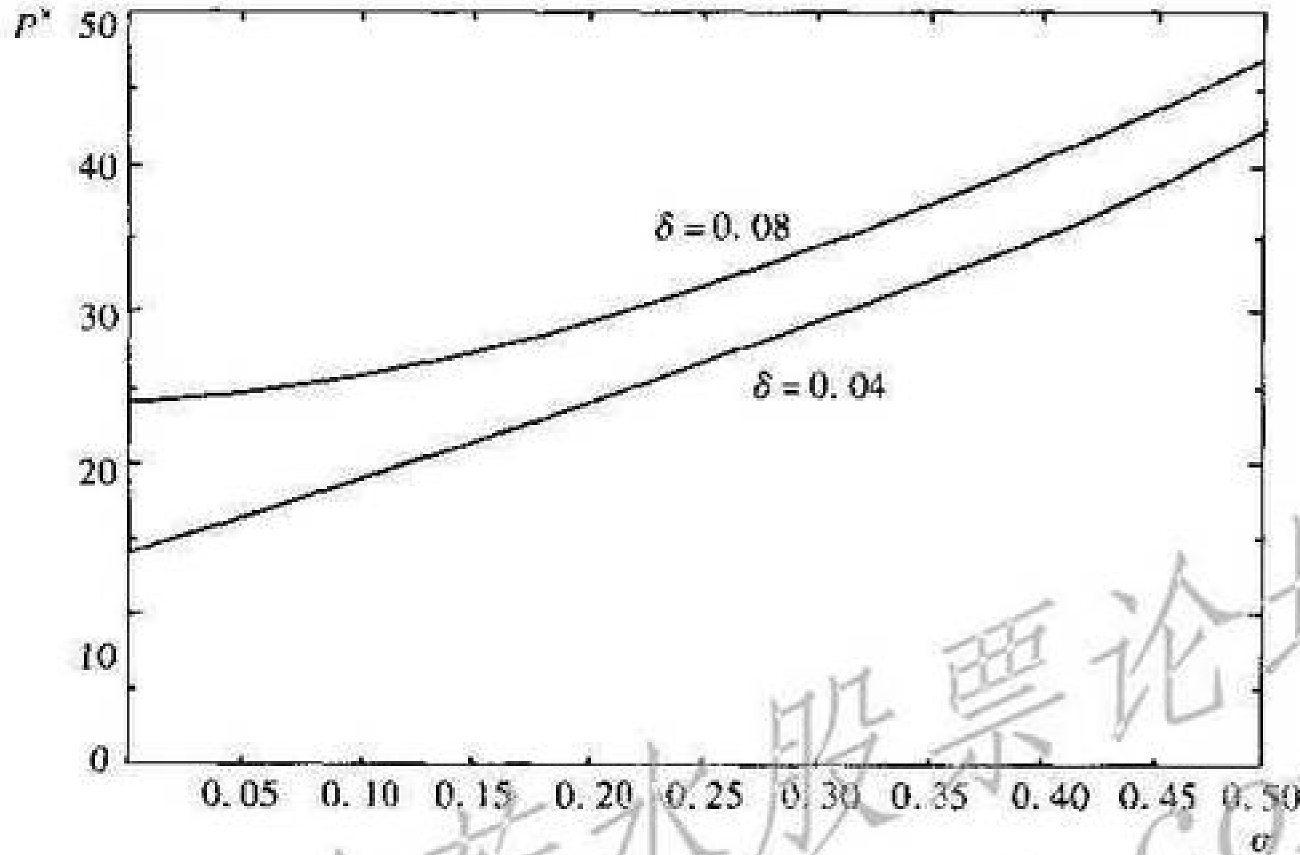


图 6—6　P 作为 σ 的函数在 δ = 0.04 和 0.08 时的临界值 P^*

上善若水股票论坛
bbs.miaogu.com

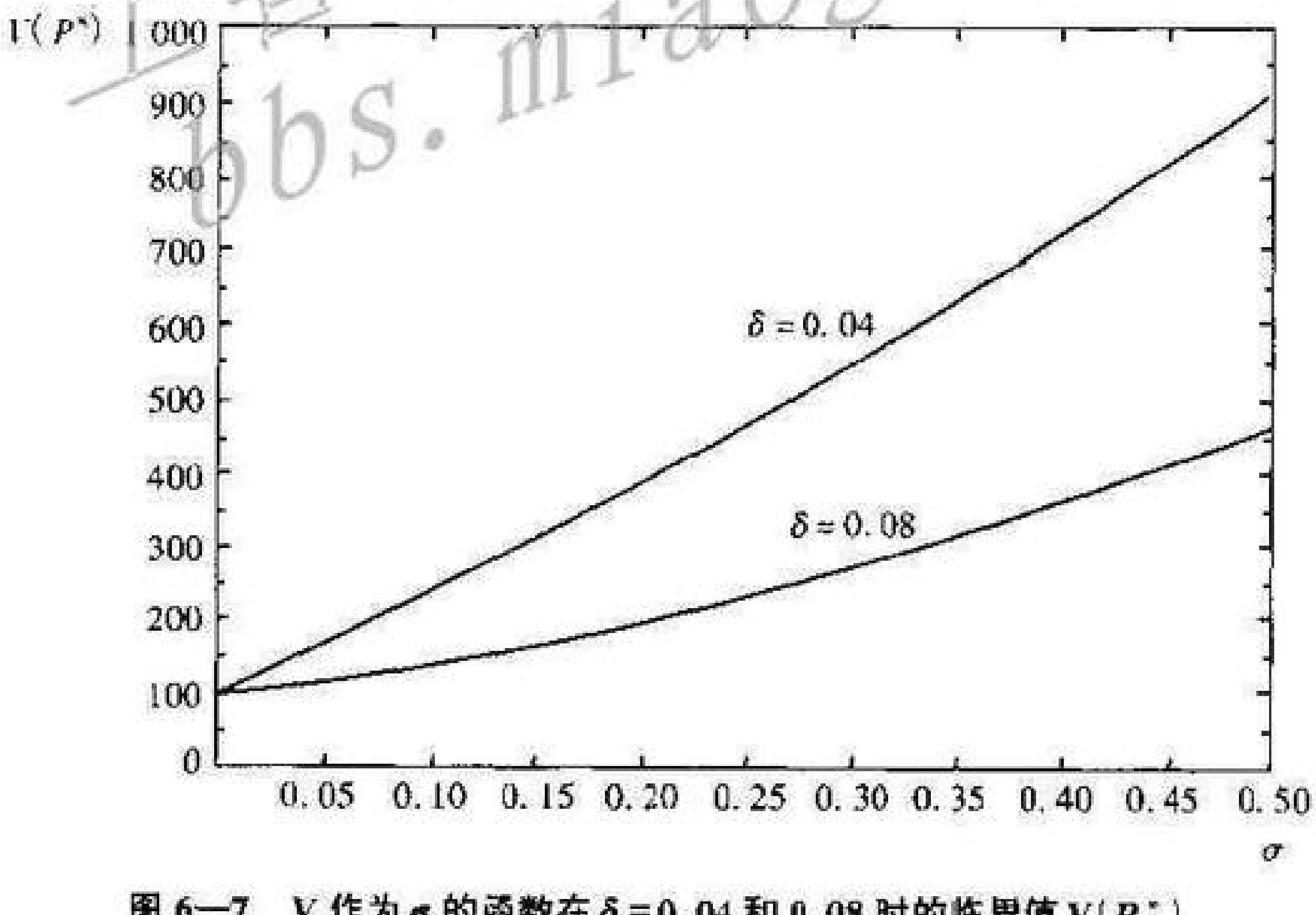


图 6—7　V 作为 σ 的函数在 δ = 0.04 和 0.08 时的临界值 $V(P^*)$

6.3 可变产出的项目

本章的基本模型可以在几种路径上扩展和推广。一种是考虑更一般的价格过程，例如，我们在第5章已经讨论过的均值回归过程，或者更一般的伊藤过程。这导致的惟一差别在于项目价值的微分方程与期权价值的微分方程之间的差别，系数变成 P 的更复杂的函数。在这样的情形下，必须依赖于数值解。由于从这种计算中不能得到新的一般性经济知识，我们在这里不说明这种模型。

扩展的不同方向值得引起一定的注意。假定单一的离散项目，一旦其启动，则允许在任意时刻，通过改变一些投入，如劳动力或原材料来改变项目的执行，其经营具有一定的灵活性，在全部时间内不需要任何不可逆的协
196 议。这样在任意时刻这些最优数量取决于那一刻的产出价格，项目将有一向上倾斜的供给曲线。最终的利润流也将取决于产出价格。看得更远一点，企业的投资决策将受到影响。我们现在更详细地考察这一点。

在每一时刻，我们对经营中的一些变量有一定的选择，如劳动力或一些瞬时投入，把它记做向量 v。这些总投入根据生产函数 $h(v)$ 生产出产品，并且有可变成本 $C(v)$。v 的最优选择可以使经营利润最大化。我们可以在瞬时利润函数的退化形式中获得结论：

$$\pi(P) = \max_v [Ph(v) - C(v)] \tag{6-18}$$

在第6.2节我们研究过一个基本模型，其中在任一时刻，企业都有简单的二元选择：或者经营或者不经营。现在我们可以把它当做一种特殊情形的更一般形式。假定变量 v 恰好可以取两个值0或1，前者对应于推迟；后者对应于经营。定义

$$h(v) = 1, C(v) = C, v = 1$$
$$h(v) = 0, C(v) = 0, v = 0$$

那么，我们得到在第6.2节所讨论的模型，其中 $\pi(P) = \max[P - C, 0]$。

另一个非常熟悉的例子是柯布-道格拉斯生产函数。假定 v 为变量，且有

$$h(v) = v^{\theta},\ 0 < \theta < 1$$

通过设定投入价格为常数 c，我们集中讨论产出价格的不确定性。（在本章的最后部分，我们将分析联合了价格及成本不确定性的一个例子。）那

bbs.mfaogir.com

么瞬时利润最大化给出了投入的需求函数为

$$v=\left(\frac{\theta P}{c}\right)^{\frac{1}{1-\theta}}$$

产出的瞬时供给函数为：

$$h(v)=\left(\frac{\theta P}{c}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}$$

将其推广到几种可变投入的情形也很容易，并产生几乎相同的结果。

当可变投入被最优选择时，利润流为

$$\pi(P)=(1-\theta)\left(\frac{\theta}{c}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}P^{\frac{1}{1-\theta}} \tag{6-19}$$

为简化记号，将上式写作 $\pi(P)=KP^{\gamma}$，其中 $\gamma=\dfrac{1}{1-\theta}>1$。

对已最大化的利润 $\pi(P)$，表达式中 P 的幂大于1；这样 $\pi(P)$ 为 P 的凸 197
函数。这是标准的“二元”性质，参见迪克西特（Dixit，1990）或瓦里安（Varian，1991）的论述。对此的直觉是，在经营中没有任何瞬时变化时，产出为一常数，而收益与利润随 P 线性变化。在有可能出现瞬时变化的情况下，当 P 上升时的最优选择一定是使利润增加得更快，而当 P 下降时的最优选择必定是使利润下降更慢。这使得 $\pi(P)$ 为凸函数。考虑到不确定性对投资的影响，这会有重要的结果。

现在让我们寻找项目的价值，即全部经营期权序列的价值。当然，在这里每一时刻的期权都是被执行过的，但是当 P 变化时对 v 有不同的选择。如果我们考虑在每一时刻的某一固定的生产成本流，则将有一个更低的 P（熟悉的马歇尔最小平均成本）的边界，低于此边界，经营就会被推迟。

我们继续假定价格服从式（6－1）的几何布朗运动，则熟悉的步骤产生了项目价值的微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2P^2V''(P)+(r-\delta)PV'(P)-rV(P)+KP^{\gamma}=0 \tag{6-20}$$

这一方程式的齐次部分与以前一样，但是非齐次项有差异。我们试验一种形式为 K_1P^{γ} 的一个特殊解，将其代人并对 K 求解，我们找到了解：

$$\frac{KP^{\gamma}}{r-(r-\delta)\gamma-\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1)}$$

这看起来非常复杂，但它却有自然的经济学解释：它正好是利用适当的

风险调整利率计算出来的利润流为 KP^{γ} 的预期现值。这可以看做是第4.3.1中等价风险中性评价公式的另一种应用。它表明，我们可以利用无风险的贴现率，假如我们改变 P 的随机过程，并让它具有不同的增长率（$r-\delta$）。那么对任何未来时刻 t，利用 P_t 的对数正态分布结论，我们有

$$E'[K(P_t)^{\gamma}]=KP^{\gamma}\exp\{[\gamma(r-\delta)+\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1)]t\}$$

式中，P 为初始价格；E' 为相对这一新过程所计算出的预期。上式乘以 e^{-rt} 并积分，我们得到前面方程的现值。

198 为更直接地考察结论，我们利用伊藤引理来描述预期增长率 P^{γ}，这里定义为 α'，即

$$\alpha'=\frac{E[dP^{\gamma}]}{P^{\gamma}}=\frac{\gamma P^{\gamma-1}E[dP]+\frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)P^{\gamma-2}\sigma^2P^2dt}{P^{\gamma}}$$

$$=[\gamma\alpha+\frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)\sigma^2]dt$$

在前面的第6.1.3中，我们计算了适用于 P 的任意幂的经风险调整的贴现率。利用那个公式，与 P^{γ} 成比例的利润率 μ' 为

$$\mu'=r+\gamma(\mu-r)$$

则 P^{γ} 的回报不足或便利收益必然是

$$\delta'=\mu'-\alpha'=r-(r-\delta)\gamma-\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1) \tag{6-21}$$

这样，我们的特殊解正好是 $\frac{KP^{\gamma}}{\delta'}$，这是利用经风险调整的适当的贴现率算出的利润流的预期现值。

我们再次排除泡沫解，并设定项目的价值等于基本价值：

$$V(P)=\frac{KP^{\gamma}}{\delta'} \tag{6-22}$$

对于所有这些，为保证其经济意义，需要有 $\delta'>0$。这也可以从另一个角度来考察，可以把关于 δ' 的表达式看做是在 γ 点所求出的基本二次式的负值。因此，通过要求 $\delta'>0$，我们要求 $Q(\gamma)<0$，则 γ 必然位于二次式的两个根之间，特别地，$\gamma<\beta_1$。结果，这与柯布-道格拉斯生产函数中把可容许的幂限定为 $\theta<\frac{\beta_1-1}{\beta_1}$ 是一样的。

期权价值的解采取了我们熟悉的形式：

$$F(P)=A_1P^{\beta_1}$$

上善若水股票论坛 bbs.m1aogu.com

最后，由价值匹配及平滑粘贴的一般条件：

$$F(P^*)=V(P^*)-I$$

$$F'(P^*)=V'(P^*)$$

可以求解方程并刻画出引起投资的临界价格 P^* 的特征：

$$\frac{K(P^*)^\gamma}{\delta'}=\frac{\beta_1}{\beta_1-\gamma}I \tag{6-23}$$

上式左边为利润的预期现值；它必须超出投资成本的"期权价值乘数" 199

$\frac{\beta_1}{\beta_1-\gamma}$。在我们已经构建的条件下，$\beta_1>\gamma>0$，因此，该乘数再次超过了1。

现在我们考察不确定性对投资的影响。在前面的工作中，我们把 δ 看做独立于 σ 的参数，现在暂时还继续这样做。我们已经知道了 σ 上升的一种影响：它降低了 β_1 从而提高了乘数 $\frac{\beta_1}{\beta_1-\gamma}$，这对 P^* 的提高有贡献。更大的波动性提高了投资期权的价值，因此，在提出投资时要求有更高的当前临界盈利能力。当 σ 提高时，保持 δ 固定，我们从式（6-21）中发现 δ' 下降了。那么式（6-23）表明这加强了导致更低的 P^* 的影响，因此，它引起了更多的投资。

这种新观点来自于价格中利润的凸性。当我们预测更远的未来时，价格分布的方差提高了。利用詹森不等式，凸函数的期望值增加。伊藤引理使这一点更精确：在利润流的预期增长率中有一额外的项 $\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1)$。因为更大的 σ 意味着利润流更大的预期现值，所以对投资有更多的激励。我们将在第11章再次遇到投资的"詹森不等式效应"。

6.4 折旧

我们一直假定，一旦进行投资，它将永远持续。在现实中，物理性腐化或技术性退化限制了项目的寿命。换句话说，年限、使用或竞争性技术的进步等会使资本折旧。在原则上把这一点考虑进来并修正我们的分析并不是一件难事，尽管这样做确实在一定程度上把算术问题复杂化了。在本节中，我们将说明，如何在经济学理论中经常用到的相对简单的衰退模式上作出这种修正。

折旧也与投资的"实物期权"方法有概念上的联系。人们可以预期、一

个折旧项目的投资机会的价值要低一些，因此，对折旧的考虑将降低前面所强调过的问题的重要性。我们的分析将证明，要小心地解释这种直觉。采取
200 行动的期权价值取决于行动的不可逆程度，这不仅取决于一个项目的预期寿命，而且也取决于第一个项目结束之后这种机会是否依然存在。

6.4.1 指数衰减

为了分析上的方便，我们先从最经常用于经济理论的折旧模式开始。这里项目期限是随机的，并服从泊松过程。在任何时刻 T，如果项目已经存在了很长时间，那么在下一个短时间段 dT 内项目死亡的概率为 λdT。现在，从初始观点来看，项目在时间 T 之前死亡的概率，或随机期限 T 的累积性概率密度函数为 $1-e^{-\lambda T}$，T 的相应概率密度函数为 $\lambda e^{-\lambda T}$。

假定在其寿命周期内，项目将在没有可变成本的条件下生产出 1 单位的产出流。初始价格为 P，其随后的路径 P_t 服从增长率为 α 的几何布朗运动，适用于 P 的经风险调整的贴现率为 μ。

如果项目确实持续到了 T，其利润流的预期现值为

$$E\int_0^T e^{-\mu t}P_t\,dt = \int_0^T Pe^{\alpha t}e^{-\mu t}\,dt = \frac{P[1-e^{-(\mu-\alpha)T}]}{\mu-\alpha} = \frac{P(1-e^{-\delta T})}{\delta}$$

正如以前所述，我们已经简化了 $\mu-\alpha=\delta$，δ 为复制了 P 的风险的一项交易资产的回报不足或便利收益。现在我们可以利用寿命周期的概率密度为泊松过程来获得项目的预期值：

$$V(P) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda T}P\,\frac{1-e^{-\delta T}}{\delta}\,dT = \frac{\lambda P}{\delta}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda+\delta}\right) = \frac{P}{\lambda+\delta}$$

正式地，我们可以把项目看做是无限寿命的，但是通过加入泊松死亡参数来讨论未来利润的贴现率，因此，贴现率从 μ 增加至 $\mu+\lambda$。这与我们在第 3 章及第 4 章对泊松过程的一般分析相符合。

201 这一公式有不同的解释。(1) 项目可能会有无限寿命，但是随着其年限的增加，其功能可能越来越差，在启动之后的某时刻 t 生产出的产出流为 $e^{-\lambda t}$，这将产生与前面计算出的预期值相同的贴现现值。(2) 随着时间延长，设备可能需要不断增长的维护开支流。我们可以把 $Pe^{-\lambda t}$ 看做项目在时刻 t 所产生的利润流的表示形式或退化形式的表达式。

接下来，我们评估此类项目的投资期权的价值。我们必须区分两种可能性：期权可能赋予企业对该项目只投资一次的权利，在项目结束后，企业不

bbs.mfaogu.com

而有更多的权利；或者企业可能永远持有投资的权利，在一个项目死亡后，它又获得了再次投资的原始机会。我们从第一种情形开始。

令$F(P)$表示期权的价值。正如前述，我们构建了由一个单位的期权及生成P的风险的$F'(P)$单位的资产空头所组成的一个投资组合。注意到，这种交易的资产对项目或企业是外生的，它不会随着项目的消亡而消亡。因此，其便利收益为$\delta=\mu-\alpha$。进行与以前一样的计算，产生期权价值的函数形式：

$$F(P)=A_1P^{\beta_1}$$

式中，A_1为待定常数；β_1为熟悉的二次方程式（6－4）的负根。

通过求解价值匹配和平滑粘贴条件，可以同时确定投资的临界值P^*及常数A_1：

$$F(P)=V(P)-I$$
$$F'(P)=V'(P)$$

式中，I为投资的沉没成本。简单的计算给出：

$$P^*=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}(\delta+\lambda)I \tag{6-24}$$

这几乎跟我们前面的关于无限期限的项目的投资临界值的公式（6－9）是一样的，惟一的差别在于右边的δ被$\delta+\lambda$替代。通过考虑风险中性及价格的零趋势可以理解这一点。那么，$\delta=r$，且rI正好是无限期限投资的成本的年金化或等价流量。在临界点，利润流应该是这一成本流的一个倍数，以反映出进行投资时所牺牲的期权的价值。当引入折旧时，与成本相等的流量通过泊松死亡参数递增，因为投资的沉没成本必须在更短的预期期限内得到补偿。然而，相同的期权价值乘数适用于这一新的成本流：β_1的方程不受折 202
旧的影响。因此，折旧将降低期权价值的重要性的直觉在这种背景下是不成立的。

由于投资机会只有一次，即使项目只有有限的期限，投资期权的执行也是不可逆的。如果我们采用另外一种观点，其中物理寿命是无限的，但是产出流指数递减，则折旧与行动的不可逆没有关系。

如果投资期权永远存在则情况就不同了，因此，企业在第一个项目期满后重新获得了开始另一相同项目的权利。当然，在第一个项目死亡的那一时刻，随机演化的价格可能会太低以至于不能调整投资，但是企业再次获得了期权，当价格重新上升到临界值时，企业就可以开始第二个项目。我们现在

转到这种情形。

在这个分析中，我们必须考虑到 P 的各种非线性函数的收益与价值，以及适用每种情况下的经风险调整的贴现率是不同的。我们采用有外生指定的贴现率 ρ 的动态规划观点。然而，假定项目死亡的泊松风险完全能够被分散，我们也可以利用或有债权方法展开类似的分析；这一点在第 4 章泊松过程的背景下得到了讨论。

令 P^* 表示投资的临界值，令 $F(P)$ 表示投资期权的价值。在不执行的条件下，即 $0<P<P^*$ 的范围内，这个期权只有一种预期资本收益：

$$E[\mathrm{d}F(P)]=[\alpha PF'(P)+\frac{1}{2}\sigma^2P^2F''(P)]\mathrm{d}t$$

令它等于正常回报 $\rho F(P)\mathrm{d}t$，我们得到关于 $F(P)$ 的熟悉的微分方程，及一个同样熟悉的解：

$$F(P)=A_1P^{\beta_1}$$

式中，A_1 为待定常数；β_1 为下述二次式的负根：

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)+\alpha\beta-\rho=0 \tag{6-25}$$

与往常一样，我们已经考虑了 $P\to 0$ 时的极限，从而排除了含有负根的项。

令 $J(P)$ 表示一个已实施项目的价值及所有未来重置期权的价值。首先考虑 $P<P^*$ 的范围。在下一很短的时间区间 $\mathrm{d}t$，利润流为 $P\mathrm{d}t$，则当前项
203 目死亡且企业重新持有价值为 $F(P)$ 的期权的概率为 $\lambda\mathrm{d}t$。这样

$$\begin{aligned}J(P)=&P\mathrm{d}t+(1-\lambda\mathrm{d}t)\mathrm{e}^{-\rho\mathrm{d}t}E[J(P+\mathrm{d}P)]\\&+\lambda\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-\rho\mathrm{d}t}E[F(P+\mathrm{d}P)]\end{aligned}$$

利用伊藤引理展开右边并简化，我们有

$$\frac{1}{2}\sigma^2P^2J''(P)+\alpha PJ'(P)-(\rho+\lambda)J(P)+P+\lambda A_1P^{\beta_1}=0$$

上式的解如下：

$$J(P)=B_1P^{\beta'_1}+\frac{P}{\rho+\lambda-\alpha}+A_1P^{\beta_1}$$

式中，B_1 为需要确定的常数；β'_1 为下面的二次式的负根：

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)+\alpha\beta-(\rho+\lambda)=0 \tag{6-26}$$

在范围 $P>P^*$，类似的分析仍然适用，但如果当前项目死亡，新项目将立即开始。因此

上学考水股票论坛 bbs.miaogu.com

$$J(P)=P\mathrm{d}t+(1-\lambda\mathrm{d}t)\mathrm{e}^{-\rho\mathrm{d}t}E[J(P+\mathrm{d}P)]$$
$$+\lambda\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-\rho\mathrm{d}t}E[J(P+\mathrm{d}P)-I]$$

这可以变成

$$\frac{1}{2}\sigma^2P^2J''(P)+\alpha PJ'(P)-\rho J(P)+P-\lambda I=0$$

其解为

$$J(P)=B_2P^{\beta_2}+\frac{P}{\rho-\alpha}-\frac{\lambda I}{\rho}$$

式中，B_2 为需要确定的常数；β_2 为二次式（6－25）的负根。

$J(P)$的两个分支在其有效范围的公共点 P^* 必须相切。而且由于 P^* 为投资的临界值，$F(P)$必须满足$J(P)-I$ 在 P^* 的价值匹配和平滑粘贴条件。这样我们有四个方程用于确定常数 C_1，B_1，B_2 和临界值 P^*。这就完成了求解过程。

似乎非常复杂的过程产生了非常简单的答案。由于函数$J(P)$在 P^* 左边和右边的两个分支在 P^* 点相切，可以利用任意一个分支的价值匹配和平滑粘贴条件在 P^* 将$F(P)$和 $J(P)-I$ 联系起来。左边的分支给出了更简单的解法。价值匹配条件为

$$A_1P^{\beta_1}=B_1P^{\beta'_1}+\frac{P}{\rho+\lambda-\alpha}+A_1P^{\beta_1}-I$$

或者　204

$$B_1P^{\beta'_1}+\frac{P}{\rho+\lambda-\alpha}=I$$

平滑粘贴条件为

$$\beta'_1B_1P^{\beta'_1-1}+\frac{1}{\rho+\lambda-\alpha}=0$$

求解这两个方程，并令 $\rho-\alpha=\delta$，我们发现

$$P^*=\frac{\beta'_1}{\beta'_1-1}(\delta+\lambda)I \qquad (6-27)$$

将式（6－27）与期权仅赋予企业投资于该项目一次的权利的情形下的公式（6－24）进行比较。两式的等价成本流部分是相同的，但是期权价值乘数却不同。来自于式（6－26）的根 β'_1 与来自式（6－25）的根 β_1 不同，后者有一个加到贴现率 ρ 上的折旧参数 λ。因此，$\beta'_1>\beta_1$ 且$\frac{\beta'_1}{\beta'_1-1}<\frac{\beta_1}{\beta_1-1}$，在这种情形下，折旧确实降低了期权价值乘数。如果投资期权永远可用，当项

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

目折旧加速时，在任何情形下，投资期权的执行都是不可逆性较低的一种行动。

表 6—1 说明了这种影响的数值意义。正如在本章前面计算的情形一样，我们采用 $\rho=r=0.04$ 及 $\alpha=0$。然后显示了不同的 σ 和 λ 值条件下的期权价值乘数 $\frac{\beta'_1}{\beta'_1-1}$。折旧对期权价值乘数有明显的影响，但是乘数依然明显大于 1，特别是当 σ 不是太低时。

表 6—1　　折旧条件下的期权价值乘数

λ	σ			
	0.1	0.2	0.3	0.4
0.00	1.421 5	2.000 0	2.763 1	3.732 1
0.01	1.370 6	1.863 2	2.500 0	3.296 6
0.05	1.265 1	1.595 4	2.000 0	2.486 8
0.10	1.207 7	1.456 1	1.750 0	2.093 8
0.15	1.175 9	1.381 3	1.619 3	1.892 7

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

205 **6.4.2　突然死亡**

下面转到指数衰减或泊松衰减，这是经济分析中最流行的折旧模式，其中项目保持完全健康的时间为一固定的有限寿命，接着是突然的瞬间死亡。[9]

令 T 表示固定的有限寿命。项目在 T 内连续地生产出单位产出，因而连续地生产出利润流 $\{P_t\}$，然后在这一点项目突然停止了运行。令初始价格为 P。在实施时，项目的瞬时价值为其寿命周期内预期利润的贴现值：

$$V(P)=E\int_0^T e^{-\mu t}P_t\mathrm{d}t=\frac{P[1-e^{-(\mu-\alpha)T}]}{\mu-\alpha}=\frac{P(1-e^{-\delta T})}{\delta}$$

这里我们利用了风险调整的贴现率 μ，并认识到价格的期望值及由此引起的利润流以 α 比率呈指数增长。

在式（6－5）中我们发现，对某一无限寿命项目来讲，其价值 $V(P)=\frac{P}{\delta}$。上面的公式现在被看成一种非常自然的一般化；由 $T\to\infty$ 时所得极限可得无限寿命的情形。

遵循与前面部分相同的步骤，并区分一次性或永久性期权的情形，现在

可以发现投资期权的价值。我们把这一点留做练习。

6.4.3 一般情形

我们可以把前面的折旧的普通形式包括在一个非常一般化的分析中。假定项目产出的利润流为$\pi(P,t)$。泊松衰减情形下π呈指数下降，而在“单马拉的四轮车”情形下，π先是在一段时间内保持为常数，然后会降到零。更一般地，π可能会随着时间推移而逐渐下降，这或者是因为资本承受着逐步的物理衰减；或者是因为具有建造时日的技术水平的项目必须与更晚的或更新的项目进行竞争。在后一种情形下，当$\pi(P,t)$下降为零时，项目在内生性日期将推迟经营，这种现象有时被称为“经济性退化”。这在确定及单调的技术进步框架中被模型化，这一框架是由索洛、托宾、范·韦扎克和亚里（Solow, Tobin, Von Weizsacker and Yaari, 1967）及布里斯（Bliss, 1968）的文中详细说明的。我们建议，将它在不确定情形下的推广作为有兴趣的读者的一项研究练习。 206

这种项目的价值可以解释为现值的积分，但是π的一般形式难以求值。我们描述了另一种方法，它对项目在其寿命周期内任意时刻的价值的一般形式的推导上具有额外的优势，而不是仅仅在构建的初始期日。

令$V(P,t)$表示作为当前价格P和当前时间t的函数的项目价值。我们考虑通常的投资组合是，在一个短的时间段dt内持有项目及与P完全相关的n单位指定资产的空头。在这一时间内，投资组合所获得的股息为$\pi(P,t)dt-n\delta Pdt$。这里与往常一样，$\delta=\mu-\alpha$为资产P的“回报不足”或者便利收益，关于股息的表达式中的第二项代表空头的持有者的支付必须与相应的多头持有者相匹配。这样，投资组合的资本收益由下式给出：

$$dV(P,t)-ndP=[V_P(P,t)-n]dP+[\frac{1}{2}\sigma^2P^2V_{PP}(P,t)+V_t(P,t)]dt$$

这里我们利用下标表示偏导。由于V现在有两个独立变量，通过选择$n=V_P(P,t)$，我们可以使投资组合无风险。然后，我们可以令投资组合的预期总回报等于无风险回报：

$$\pi(P,t)-\delta PV_P(P,t)+\frac{1}{2}\sigma^2P^2V_{PP}(P,t)+V_t(P,t)=r[V(P,t)-PV_P(P,t)]$$

或者

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V_{PP}(P,t)+(r-\delta)PV_P(P,t)+V_t(P,t)$$
$$-rV(P,t)+\pi(P,t)=0$$

这是一个可以利用数值方法求出来的偏微分方程。如果存在一个已知的最大
207 可能存命周期 T，在对所有的 P 都有 $V(P,T)=0$ 的条件下，可以采用后溯法从 $T=0$ 开始，求出方程的解。我们将在第 10 章从另一种背景下说明这样的解。

这里我们指出进入视野的新项 $V_t(P,t)$ 的经济意义。项目的价值现在由于两个原因可能变化：由于随机价格的不同初始值和由于利润流的未来状况发生改变而导致的纯时间阶段。后者的影响正好就是经济学家对折旧的解释。这样，$V_t(P,t)$ 给我们提供了有关经济折旧的数值测度。这一概念由萨缪尔森（Samuelson，1964）在确定及完全预见的背景下得到了很好的说明，这里，我们自然地将其扩展到适应于不确定和理性预期的情形。

6.5 价格与成本不确定

在此之前，我们只考虑一个随机变量，即产出价格（或需求移动变量），而保持其他所有与投资决策有关的参数为已知常数。我们这样做是为了在相对简单的环境下说明分析方法。在两个或更多的随机变量影响企业决策的更一般情形下，同样的方法也适用。例如，如果投资成本 I 与产出价格 P 两者都不确定，那么我们不得不将项目的价值与投资期权的价值解释为这两个变量，即 $V(P,I)$ 和 $F(P,I)$ 的函数，则我们必须找到投资发生的（P、I）值的所有区域、投资不发生的（P，I）值的所有区域以及将这两个区域分隔开来的边界或临界曲线。毫无疑问，这在数学上更加困难。在两个独立变量的条件下，价值方程满足偏微分方程，它们的解可能需要有一定复杂性的数值方法。[10]然而，一些具有特殊特征的例子（特别是一些齐次形式）可以通过将问题简化为一个状态变量而得到解决。我们现在说明这一点。

考虑一个只有 1 单位规模的项目，其投资成本 I 和收入流 P 都是不确定的。甚至可以认为，由于一些共同的宏观经济的冲击，这两个变量之间的不确定是相关的。这样，我们假定 P 和 I 服从几何布朗运动：

$$\frac{dP}{P}=\alpha_P dt+\sigma_P dz_P$$

上善若水股票论坛 bbs.mlaogu.com

$$\frac{dI}{I}=\alpha_I dt+\sigma_I dz_I$$

其中 208

$$E[dz_P^2]=dt$$

$$E[dz_I^2]=dt$$

$$E[dz_P dz_I]=\rho dt$$

一旦作出投资，投资成本中的更进一步的不确定是无关的。当当前价格为 P 时，一个有活力的项目的价值仅仅为 $V(P)=\dfrac{P}{\mu_P-\alpha_P}=\dfrac{P}{\delta_P}$，其中 $\mu_P=r+\phi\rho_{pm}\sigma_P$ 为适用于 P 的经风险调整的贴现率，$\delta_P=\mu_P-\alpha_P$ 为 P 的便利收益或回报不足。

然而，投资期权的价值取决于 P 和 I。直观地，我们预期，当 P 低或 I 高时，期权将被持有；当 P 对于给定的 I 变得足够高，或 I 对于给定的 P 变得足够低时，期权将被执行。图 6—8 显示了对应于等待和投资的（I，P）空间中所表明的区域，以及将两者分隔开来的边界。我们的目的是使这种直觉更精确，并发展出找到边界从而决定最优投资法则的一种分析方法。

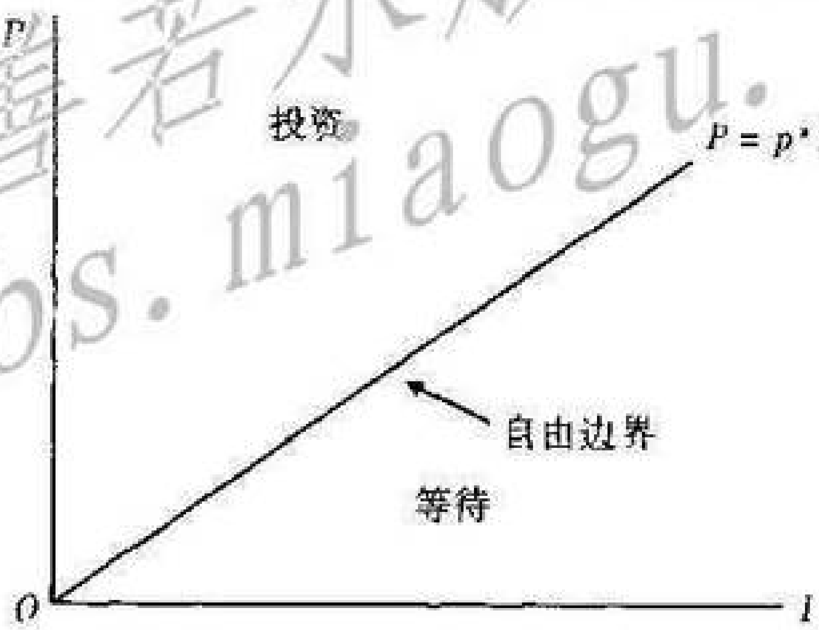


图 6—8　价格与成本都不确定下的投资

现在，对这些步骤应当非常熟悉。令 $F(P,I)$ 为期权的价值。我们发现了关于它的一个微分方程。我们假定，产出价格和投资成本两者都由已有资产来生成，而且分别在资产价格为 P 和 I 的条件下进行。[11] 为简化起见，我们将这些资产称为“产出”和“资本”。考虑一个由 1 单位期权、m 单位产出的空头以及 n 单位的资本空头所组成的一个投资组合。由伊藤引理，我们有 209

$$d(F-mP-nI)=(F_P-m)dP+(F_I-n)dI$$
$$+\frac{1}{2}(F_{PP}\sigma_P^2P^2+2F_{PI}\rho\sigma_P\sigma_IPI+F_{II}\sigma_I^2I^2)dt$$

注意右边的 dP 和 dI 为随机的。然而，我们可以选择 $m=F_P$ 和 $n=F_I$ 消去这些项，并使投资组合为无风险的。那么，在时间间隔（t，$t+dt$）内的投资组合的持有者将有确定的资本收益：

$$\frac{1}{2}(F_{PP}\sigma_P^2P^2+2F_{PI}\rho\sigma_P\sigma_IPI+F_{II}\sigma_I^2I^2)dt$$

为持有空头，必须作出支出对应于产出和资本的便利收益的支付（$m\delta_PP+n\delta_PI$）dt。令这两个成分的和等于无风险的回报 $r(F-mP-nI)dt$，整理后得到基本方程：

$$\frac{1}{2}(\sigma_P^2P^2F_{PP}+2\rho\sigma_I\sigma_IPIF_{PI}+\sigma_I^2I^2F_{II})+(r-\delta_P)PF_P+(r-\delta_I)IF_I-rF=0 \tag{6-28}$$

由于有两个独立变量（P，I），那么这是一个偏微分方程。它适用于空间（P，I）中最好持有期权而不执行的区域。在最优为立即执行的区域，我们有

$$F(P,I)=V(P)-I=\frac{P}{\delta_P}-I$$

在两个区域的边界，这是一个价值匹配条件，这两个函数必须在边界相切，这样就产生了两个平滑粘贴条件：

$$F_P(P,I)=V'(P)=\frac{1}{\delta_P}$$
$$F_I(P,I)=-1$$

微分方程与这些边界条件一起，将会固定边界条件本身的位置，而且生成在等待区域内的函数 F 的解。

边界本身是未知的这样一个事实使得求解这种类型的问题变得非常困难。事实上，偏微分方程的理论对此类“自由边界”问题一般没有什么说明。解析解几乎是不存在的，而数值解大多数都是特别的，每一个都是剪裁得适合特殊的情形。这在原则上与仅有价格是不确定时的问题没有什么差别；投资临界值 P^* 自身是未知的，而且变成了将投资发生的 P 的一维范围的价值与投资不发生时的范围分开的自由边界点。在一维空间找到方程的解要容易得多，无论是分析解还是数值解。幸运的是，在当前的情形下，问题的自然齐次式允许我们把它简化为一维空间的问题。

210

上善若水股票论坛 bbs.matiaogu.com

如果 P 和 I 的当前值都加倍，它仅仅使项目价值及投资成本加倍。因此，最优决策将仅仅取决于 $p=\frac{P}{I}$，从而图 6—8 中的边界将是通过区域的一条射线。相应地，期权价值在（P，I）内将为次数为 1 的齐次式，这使得我们可以写成下式：

$$F(P,I)=If\left(\frac{P}{I}\right)=If(p)$$

式中，f 为待定函数。

连续微分给出：

$$F_P(P,I)=f'(p)$$

$$F_I(P,I)=f(p)-pf'(p)$$

及

$$F_{PP}(P,I)=\frac{f''(p)}{I}$$

$$F_{PI}(P,I)=-\frac{pf''(p)}{I}$$

$$F_{II}(P,I)=\frac{p^2f''(p)}{I}$$

将上面的式子代入偏微分方程式（6-28）并整理，我们发现：

$$\frac{1}{2}(\sigma_P^2-2\rho\sigma_P\sigma_I+\sigma_I^2)p^2f''(p)+(\delta_I-\delta_P)pf'(p)-\delta_If(p)=0 \tag{6-29}$$

这是关于标量自变量 p 的未知函数 $f(p)$ 的普通微分方程。此外，它与我们已熟悉的仅有价格为不确定情形下的式（6-6）有相同的形式，其边界条件也是相似的。价值匹配条件变为

$$f(p)=\frac{p}{\delta_P}-1$$

两个平滑粘贴条件变为

$$f'(p)=\frac{1}{\delta_P}$$

$$f(p)-pf'(p)=-1$$

这三个条件中，任何一个都可以由另外两个导出。我们可以选择价值匹配条件及第一个平滑粘贴条件作为两个实际上与纯粹价格不确定的情形下的两个条件相似的条件，并且像以前那样完成解。基本二次式为

上善若水股票论坛
bbs.miaogu.com

$$Q = \frac{1}{2}(\sigma_P^2 - 2\rho\sigma_P\sigma_I + \sigma_I^2)\beta(\beta-1) + (\delta_I - \delta_P)\beta - \delta_I = 0$$

211 令 β_1 表示这一方程中较大的根；如果 δ_I 与 δ_P 都为正（我们假定的），则 $\beta_1 > 1$。那么，我们发现：

$$\frac{P^*}{I^*} = P^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\delta_P \tag{6-30}$$

这条射线通过原点并将空间（P，I）中的等待区域与投资区域分开。其斜率有标准的期权价值乘数的含义。[12]这样，如果 σ_P 或者 σ_I 增加，β_1 将减少，乘数 $\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$ 将增加。然而，如果 ρ 增加，乘数将下降；保持它们的方差固定，P 与 I 变化之间较大的协方差隐含着它们比例上的较小的不确定性，从而是对等待的一种递减的激励。

6.6 文献导引

本章提供了关于投资的更完备的模型，并且扩展了这种重要的观点：企业的价值主要是一组期权的价值。在第 5 章我们看到，企业持有有价值的投资期权，其中的一些将被执行，而另一些则不会被执行，因此企业的价值将等于其现存项目的价值（即替代资本）加上对未来新项目投资的期权价值。在本章我们看到，一个适当项目也可以被看做是一组与运营成本相关的期权，生产并获得利润的期权的定价应足够高，而且可以据此来被估价。这一观点出现在马库斯和莫德斯特（Marcus and Modest，1984）对农产品生产决策的背景下，但首先由麦克唐纳和西格尔（McDonald and Siegel，1985）详细地阐述。他们证明，如果价格服从几何布朗运动，运营成本固定的单位产出项目可以作为欧式看涨期权的一个无限集合来定价。本章所采用的方法更一般、更容易处理——我们简单地把项目作为单个或有债权来定价，因此，用第 5 章推导投资期权的价值 $F(P)$ 的相同方法推导出关于 $V(P)$ 的偏微分方程。然后，利用 $V(P)$ 在边界条件的解来发现 $F(P)$ 的解及最优投资规则。这种方法是由平迪克（Pindyck，1988b）在递增性投资的背景下发展出来的。

212 我们已经发现，项目评价与投资机会评价的一个重要出发点是产出价格 $P(t)$ 的潜在的随机过程。我们假定，如果价格服从几何布朗运动，其预期增长率小于经风险调整的预期回报 μ。对一种可储存的商品，这一差别将不

得不反映出存货持有者所产生的便利收益。这一点是由麦克唐纳和西格尔（McDonald and Siegel，1984）所提出来的，便利收益自身的随机结构由吉布森和施瓦茨（Gibson and Schwartz，1990）和布伦南（Brennan，1991）进行了考察。

本章引入了大量的自由边界问题，其中有一些可以通过分析方式来解决，有一些则需要数值解法。对寻求这些问题及其解的更多数学背景的读者来讲，我们向其推荐冈瑟和李（Guenther and Lee，1988）及法桑奥和普赖米塞里奥（Fasano and Primicerio，1983）的论述。

伯特拉（Bertola，1988，Chap.1）有一个在产出价格、资本品价格及可变投入价格上同时存在不确定条件下的非常一般化的模型。

这些方法中的大多数依赖于状态变量的离散化，我们已经采纳了第4章和第10章关于多变量问题的数值解的相同方法。数值方法的一些近期工作是基于一种可替代的，称之为有限元的方法。这里，独立变量空间的全部区域被分为小的单元，我们试图获得的函数是通过每一单元的低阶多项式来近似地获得的，不同的近似形式在单元的边缘粘贴在一起。这种方法看起来在许多经济学的应用中是先进的，有兴趣的读者可参考约翰逊（Johnson，1990）和朱迪（Judd，1992）的著作。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

【本章注释】

[1] 这些收益可以包括平滑生产能力的提高、避免库存及推动生产和销售的时序安排。首先，便利收益是企业持有存货的原因，即使当那些存货的预期资本收益低于风险调整的利率，甚至为负。正如人们所期望的，对大多数商品来讲，边际便利收益与存储总量呈相反方向变化。关于便利收益的经验研究及其在商品价格信息中的作用，参见平迪克（Pindyck，1993c，d）的论述。

[2] 例如，参见吉布森和施瓦茨（Gibson and Schwartz，1990，1991）的论述，他们说明了当石油价格服从几何布朗运动，且便利收益率也服从随机过程时，石油生产项目如何能被定价。此外，布伦南（Brennan，1991）估计并检验了便利收益的其他函数及随机过程以及它对价格与时间的依赖。

[3] 投资组合的组成成分在很短的时间区间（t，$t+dt$）内保持为常数，这样 n 仍然等于$V'(P(t))$，即使$V'(P)$本身会随着 P 的变化而在这一时间区间内变化。在较小的时间区间内，"动态套利策略"将在连续的短

时间区间内调整投资组合。这样，在（$t+dt$，$t+2dt$），我们将 n 设定为 V'（P（$t+dt$）），依此类推，就像一串价格指数。在连续时间的极限情形下，当 $dt\to0$ 时，这种策略的严格的表达式需要非常小心；参见哈里森和克雷普斯（Harrison and Kreps，1979）及达菲（Duffie，1988，pp.138－147）的论述。

[4] 还可参见第4.3.1中以"等价风险中性估价"为基础的方法。

[5] 当 β 为基本齐次式的一个根时，利用第4.3.1中的等价风险中性评价方法，也能证明 P^{β} 的经风险调整的贴现率等于 P^{β} 预期增长率的事实。

[6] 如果我们不考虑价格的不确定性及趋势，我们获得 $\delta=r$，流动等价成本正好变成投资数量的利息成本或机会成本 rI。

[7] 只有在到期日，欧式期权才可以执行，而美式期权可以在到期日前的任意时刻执行。

[8] 注意到这些讨论正如我们以前所做的一样，排除了投机性泡沫。

[9] 在经济理论中，这种突然死亡的折旧有时候被称为"单马拉的四轮车"（one-hoss shay）。这一术语来自奥利弗·温德尔·霍尔姆斯（Oliver Wendell Holmes）先生的诗歌《副主祭的杰作；或奇妙的单马拉的四轮车》：

你是否听说过奇妙的单马拉的四轮车
它是用如此合理的方法建造起来的
因此它一百年来如一日地奔跑着
然后，突然之间，它……立刻化为碎片

我们引用这段话是想表明经济学家并非完全缺乏文学修养。

[10] 为精确起见，我们必须解椭圆偏微分方程的自由边界问题。

[11] 另外，动态规划方法产生类似的微分方程。

[12] 无风险利率从二次方程中消失，从而在解中也消失了，这似乎令人感到疑惑。实际上，r 仍然保持在解中，只不过是隐藏在 μ_P，δ_P，δ_I 中而已。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

213

第7章　进入、退出、储存与废弃

上善若水股票论坛
bbs.miaogu.com

在上一章，我们说明了人们如何可以先评价一个项目，然后再评价项目中的投资期权并决定最优投资规则。我们的出发点是项目产出价格变化的随机过程，从而经营利润的未来流量是不确定的。有时项目的利润流会变成负数，假定在这种情形下企业将暂停经营，将来利润流变为正数时再恢复经营，并且不需要支付储存或重新开始的任何一次性成本。

对许多项目而言，这种无成本的暂停和重新开始的假定是不现实的。在一些情形下，暂停并在将来重新开始一个项目的经营几乎是不可能的。一个例子是参与新药研究与开发的一间试验室。暂停试验室的运营可能意味着失去从事研究的科学家团队，因此也就失去了未来恢复产品开

发的能力。在其他情形下存在暂停并在将来重新开始项目的可能，但却是以高昂的成本为条件的。例如，如果一个地下矿井的经营被暂停，为防止矿井被水淹没以便将来可以重新开采，必然会引起沉没成本及不断提高的固定成本，确实要重新开采必然还会产生额外的沉没成本。

本章从一个新模型开始，该模型与上一章所讨论的模型完全相反。我们
214 假定，如果经营曾经被暂停，企业在重新启动该项目时必须重新承担全部投资成本。（这就好像一旦资本不再被使用，资本将“锈蚀”并消失一样。）现在一家活跃的企业必须考虑彻底放弃，而不是暂停。当然，在企业的经营利润流变为负数时它不会进行这一步。由于重新开始代价高昂，保持经营有一定的期权价值，而只有在经营损失的临界水平充分高时，放弃才是最优的。我们假定，无论企业面对的市场势力如何，它必须开始；而且如果它放弃经营也不会损失其投资的权利。（在第 8 章，我们将考虑完全竞争行业的另一种极端情形，其中大量潜在企业中的任何一个都可以投资，任何活跃的企业可以在不保持任何重新进入的特权的条件下放弃。）

在大多数情形下，现实情况位于无成本的临时性暂停与瞬时全部锈蚀这两个极端之间。沉没于大多数项目中的资本在不使用时会锈蚀，但却是非常缓慢的。机械设备或轮船逐渐生锈；矿山经营会遭受塌方或被洪水淹没；其他无形的东西，诸如消费者忠诚度和商标品牌的认同感的减弱等。[1]那么，重新开始是代价高昂的，但没有一个新项目那么高。在一些情形下，重新开始的成本随着暂停的持续时间而提高。为了把这一点模型化，我们必须考虑重新开始的期权（与从头开始的期权完全不同），并从最后一次暂停起引入实耗时间作为影响这个新期权价值的隐含状态变量。作为结果的偏微分方程可以通过数值方法求出，但我们在这里不处理这种情形。

在本章，我们将考虑另一种瞬时可能性。闲置资本的“不断锈蚀”可以通过“维护”得以避免——原意是指在机械设备、轮船或矿山等，这里引申到无形资产，如消费者忠诚度。不是放弃，企业可以选择维持资产而不是积极地生产产品来保持其项目存在。例如，轮船被“封存”（mothballing）或“储存”（lay-up），这产生了不断上升的维护成本，但是节约了未来重新投资的成本。在这些选择之间的权衡取决于两种成本的相对数量，以及适宜的经营条件迅速恢复的可能性。

在数学上，除了状态变量（如价格）是随机变化并影响经营的盈利性之外，放弃的可能性引入了一个二阶离散状态变量：若不运营项目，其值为

零；若运营项目，其值为1。企业的战略由一组在这两种状态之间转换的 215
决定所组成。在每种离散状态下，企业拥有另一种状态的看涨期权。一家空闲企业可以执行投资期权，这给它带来经营利润流加上一个放弃期权的价值流。我们必须在潜在的随机变量（价格）背景下找到同时执行这些期权的最优执行点。同样地，当我们考虑"封存"或"储存"的第三种选择时，将存在三种离散状态，要在这三种需要计算的状态之间进行最优转换。

7.1 进入与退出的混合战略

我们把讨论限定在需求不确定的情形。假定有一个几何布朗运动的价格过程，感兴趣的读者可以沿袭第5.5节的思路推广到其他过程，沿袭第6.5节的思路推广其他变量为不确定的情形。我们尽可能地保持第6章中的体系和记号。在价格为给定时，投资与放弃决策是由企业作出的，我们可以再次假定价格服从几何布朗运动：

$$dP = \alpha P dt + \sigma P dz \tag{7-1}$$

如果企业投资（即进入市场），它得到每期生产出1单位产出的一个项目，并永远延续，除非企业放弃它。经营中的可变成本 C 为已知常数。无风险利率为外生的，固定为 r。我们假定价格的随机波动可由经济中的其他资产来复制（正如我们已看到的，尽管实际情形并非如此，利用动态规划也能得到一个解），适用于企业收益的一个经风险调整的贴现率为

$$\mu = r + \phi \rho_{PM} \sigma \tag{7-2}$$

式中，ϕ 为风险的市场价格；ρ_{PM} 为价格 P 与整个市场组合间的相关系数。与以往一样，我们令 $\delta = \mu - \alpha$ 表示对价格来讲回报率的亏空，而且我们假定 $\delta > 0$。

投资于该项目，企业必须承受的一次性成本为 I；放弃该项目，企业必须承担的一次性成本为 E。后一种成本可能包括法律上要求的解雇工人的支付，或者将矿山的场地恢复到其自然条件的成本。一种可能的情形是，投资成本 I 中的一部分是不会沉没的，因此，E 为负数，这反映着在企业退出时可以得到补偿的那一部分投资成本。当然，我们需要 $I + E > 0$，以排 216
除在投资与放弃之间快速循环的"货币机器"。

在第6章，我们由寻找活动项目的价值 V 开始，然后继续寻找投资期权的价值 F，现在这一序列成为一个完整的周期。活动项目实际上是一种混合资产，其中一部分是放弃期权。如果该期权被执行，企业重新回到不活动的状态。换句话说，企业获得了其他的资产，即投资期权。当这种期权依次被执行时，它使企业重新回到活动的项目。这样，一个活动企业的价值与一个空闲企业的价值之间是有内在联系的，而且必须被同时确定。

直觉表明，当需求条件变得充分有利时，一家空闲企业将投资；而当需求条件变得充分不利时，一家活动企业将放弃。实际上，我们将看到，投资与放弃的最优策略，或对这两个期权的持有或执行，表现为两个临界价格，即 P_H 和 P_L（$P_H > P_L$）。一家空闲企业发现维持空闲是最优的，只要 P 依然低于 P_H；只要 P 达到临界价格 P_H，它就会投资。一家活动企业将保持活动，只要 P 保持为大于 P_L；但是如果 P 下降到低于 P_L，它将放弃。在临界价格 P_L 与 P_H 之间，最优政策是维持现状，不论企业是活动地经营还是等待。我们现在要检验这种直觉。当然，我们必须找到这些外生临界值。

上海韭菜水股票论坛 bbs.jiucaogu.com

7.1.1 两个期权的评价

现在企业的价值是外生状态变量 P 以及表明企业目前是空闲的（0）还是活动的（1）的离散状态变量的函数。为弄清这一点，我们稍微改变一下记号，令 $V_0(P)$ 表示投资期权的价值（即空闲企业的价值），令 $V_1(P)$ 表示活动企业的价值。注意，$V_1(P)$ 是两个成分的和，即来自经营的收益权及当价格大幅下降时的放弃期权。

在价格范围（0，P_H）内，一家空闲企业将持有其投资期权。与第6章一样，套利观点告诉我们，$V_0(P)$ 在这一时间区间内满足微分方程。边界条件在 P_H 点将 $V_0(P)$ 的值和导数与 $V_1(P)$ 的值和导数联系起来。类似地，在价格范围 (P_L, ∞) 内，活动企业保持活动，持有其放弃期权。$V_1(P)$ 满足相应的微分方程，边界条件在点 P_L 将 $V_1(P)$ 的值和导数与 $V_0(P)$ 的值
217 和导数联系起来。这个方程与边界条件系统包含了完成方程的解的充足信息。

我们由空闲企业开始。为得到关于 $V_0(P)$ 的微分方程，构建一个由1单位投资期权和 $V'_0(P)$ 单位的产出空头组成的投资组合。这些步骤与第5章和第6章中的步骤完全相同，因此，我们忽略其推导过程并把它作为练习

留给读者。作为结论的方程为

$$\frac{1}{2}\sigma^2P^2V''_0(P)+(r-\delta)PV'_0(P)-rV_0(P)=0 \qquad (7-3)$$

它有一般解

$$V_0(P)=A_1P^{\beta_1}+A_2P^{\beta_2}$$

式中，A_1 与 A_2 为待定常数；β_1 与 β_2 为类似于第 5 章和第 6 章的二次方程的根

$$\beta_1=\frac{1}{2}-\frac{\rho-\delta}{\sigma^2}+\sqrt{\left(\frac{\rho-\delta}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2\rho}{\sigma^2}}>1$$

及

$$\beta_2=\frac{1}{2}-\frac{\rho-\delta}{\sigma^2}-\sqrt{\left(\frac{\rho-\delta}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2\rho}{\sigma^2}}<0$$

由于投资期权远离其实值，因此，当 $P\to 0$ 时，它变得几乎没有价值，对应于负根 β_2 的系数 A_2 必须为零。这样

$$V_0(P)=A_1P^{\beta_1} \qquad (7-4)$$

注意，在价格区间 $(0,\ P_H)$ 内，它是有效的。

下面考虑活动企业的价值。计算是类似的，除了资产组合中活动项目部分支付$(P-C)\mathrm{d}t$ 的净现金流量。那么，我们得到

$$\frac{1}{2}\sigma^2P^2V''_1(P)+(r-\delta)PV'_1(P)-rV_1(P)+P-C=0 \qquad (7-5)$$

该方程的一般解为

$$V_1(P)=B_1P^{\beta_1}+B_2P^{\beta_2}+\frac{P}{\delta}-\frac{C}{r}$$

与第 6 章一样，我们把最后两项解释为无论有任何损失企业都被迫维持其经 218
营时活动项目的价值，把前两项解释为放弃期权的价值。当 $P\to\infty$ 时，在不远的将来放弃的可能性变得非常小；因此，当 P 变得非常大时，放弃期权的价值应当趋于零。因此，对应于正根 β_1 的系数 B_1 将为零。这样

$$V_1(P)=B_2P^{\beta_2}+\frac{P}{\delta}-\frac{C}{r} \qquad (7-6)$$

在区间 $(P_L,\ \infty)$ 内，这对 P 是合理的。

在投资临界值 P_H 处，为执行其投资期权企业将支付一次性成本 I，为获得价值为 $V_1(P_H)$ 的活动项目而放弃价值为 $V_0(P_H)$ 的资产。因此，我们得到价值匹配及平滑粘贴条件：

上海若水股票论坛 bbs.miaogu.com

$$V_0(P_H) = V_1(P_H) - I, V'_0(P_H) = V'_1(P_H) \tag{7-7}$$

同样地，在放弃临界值 P_L 处，价值匹配与平滑粘贴条件为

$$V_1(P_L) = V_0(P_L) \quad E, V'_1(P_L) = V'_0(P_L) \tag{7-8}$$

利用关于 $V_0(P)$ 和 $V_1(P)$ 的式（7-4）和式（7-6），这些条件可以写成

$$-A_1 P_H^{\beta_1} + B_2 P_H^{\beta_2} + \frac{P_H}{\delta} - \frac{C}{r} = I \tag{7-9}$$

$$-\beta_1 A_1 P_H^{\beta_1 - 1} + \beta_2 B_2 P_H^{\beta_2 - 1} + \frac{1}{\delta} = 0 \tag{7-10}$$

$$-A_1 P_L^{\beta_1} + B_2 P_L^{\beta_2} + \frac{P_L}{\delta} - \frac{C}{r} = -E \tag{7-11}$$

$$-\beta_1 A_1 P_L^{\beta_1 - 1} + \beta_2 B_2 P_L^{\beta_2 - 1} + \frac{1}{\delta} = 0 \tag{7-12}$$

这四个方程确定了四个未知数——临界价格 P_H，P_L 以及期权价值中的系数 A_1 和 B_2。

在这些临界点，这些方程绝对不是线性的，因此，准确形式的解析解是不可能得到的，然而可以证明解的存在性和惟一性，而且这个解具有经济学直觉上的基本特征。临界值满足 $0 < P_L < P_H < \infty$，因此，期权价值项中的系数 A_1 和 B_2 为正。[2] 其他一些重要的一般经济知识可以由分析方法得到，但是更进一步的结论需要数值解。下面我们依次进行。

219 ### 7.1.2 与短视决策的比较

典型的中级微观经济学教材中所说明的投资与放弃的理论是以马歇尔长期平均成本和短期可变成本的概念为基础的。对我们的单位规模企业而言，长期平均成本为经营成本与投资的沉没成本（$C + rI$）的利息之和。教科书中的理论告诉一家企业，如果价格超过这一点就应该投资。类似地，如果价格下降到低于可变成本 C，活动企业应当放弃。当存在明确的一次性放弃成本 E 时，企业也应当考虑这一成本的利息，因此，临界值变为$(C - rE)$。

换句话说，传统的马歇尔概念是将投资的回报率$\frac{P-C}{I}$和不投资的回报率$\frac{C-P}{E}$与名义回报率 r 进行比较。隐含在这一观念背后的是静态预期或短视的假定——即当前价格被假定为永远如此。在分析价格变化是突然发生的，而且企业确切地知道这种突然变化永远不会再发生的情形下，这种观点

是恰当的。然而，这样的价格变化非常少见。在现实世界的大多数情形下，企业所面临的需求（及成本）条件在全部时间内都是变化的，而且企业在作出投资和不投资决策时，必须考虑到未来是不确定的，并且经常是这样的。因此，一种更自然的理论方法是假定企业对不确定环境变化的概率规律有理性预期。我们前面的模型正是这样做的——在给定了价格的随机过程式(7-1）后，企业的投资决策是最优的。

现在我们有这样一个问题，即给定企业是理性预期的而非静态预期的，这会产生什么差别。最优投资临界值 P_H 如何与马歇尔的临界值（$C+rI$）进行比较？最优放弃临界值 P_L 如何与马歇尔临界值（$C-rE$）进行比较？为回答这些问题，我们从定义下述函数开始。

$$G(P)\equiv V_1(P)-V_0(P)=-A_1P^{\beta_1}+B_2P^{\beta_2}+\frac{P}{\delta}-\frac{C}{r} \tag{7-13}$$

这个函数可以对所有的 P 正式地加以定义。然而，注意到 $V_1(P)$ 仅仅在区间（P_L，∞）内定义了活动企业的价值，而 $V_0(P)$ 仅仅在区间（0，P_L）上定义了空闲企业的价值。因此，在区间（P_L，P_H）内，我们可以把 $G(P)$ 解释为企业变为活动状态时所说增加的价值，即企业在活动状态下的价值比不活动状态下的价值高多少。

对 P 的一个很小的值，$G(P)$ 中的主项是 P 的幂为 $\beta_2<0$ 的那一项，它是递减的并且为凸。对 P 的一个很大的值，$G(P)$ 中的主项是 P 的幂为 $\beta_1>0$ 的那一项；这一项为负值，递减并且为凹。对中间值而言，第三项对 $G(P)$ 的增加部分有贡献。这样，$G(P)$ 的一般形式如图7—1所示。 220

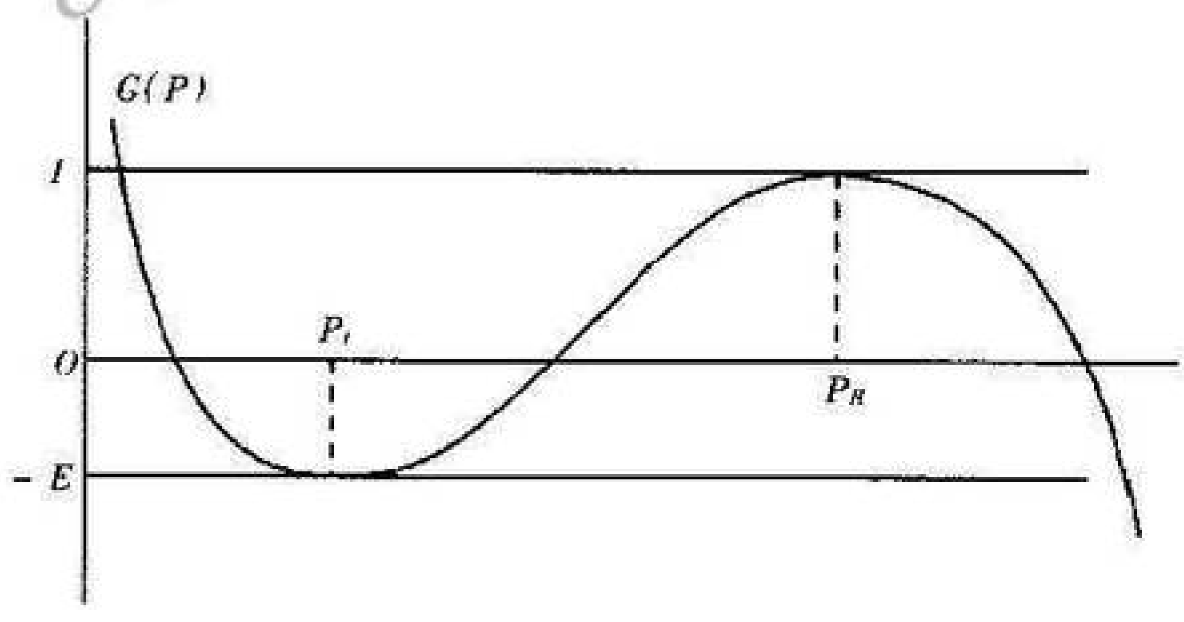


图7—1 临界值 P_L 和 P_H 的确定

上海老股票论坛 bbs.mlzaogu.com

适用于这些临界点的边界条件可用$G(P)$的形式写出来。价值匹配条件式（7－9）和式（7－11）变成

$$G(P_H)=I, G(P_L)=-E$$

而平滑粘贴条件式（7－10）和式（7－12）可以写作

$$G'(P_H)=0, G'(P_L)=0$$

参见图 7—1，这些条件意味着$G(P)$的图像在 P_L 和P_H 范围内应当为S形，而且在最高点与高度为 I 的水平线相切，在最低点与高度为 $-E$ 的水平线相切。[3]注意到$G(P)$在点 P_H 为凹而在点P_L 为凸。

221 现在考虑较高的临界值。将关于$V_0(P)$的微分方程式（7－3）及关于$V_1(P)$的微分方程式（7－5）代入，我们有

$$\frac{1}{2}\sigma^2 G''(P)+(r-\delta)G'(P)-rG(P)+P-C=0$$

对 $P=P_H$ 进行评价，并且利用在点 P_H 必须成立的边界条件，我们发现

$$-rI+P_H-C=-\frac{1}{2}\sigma^2 G''(P_H)>0$$

或者 $P_H>C+rI$。类似地，在另一种极端情形下，我们有 $P_L<C-rE$。换句话说，理性预期下的最优临界值比马歇尔静态预期下的最优临界值扩散得更远。当不活动的企业考虑未来政策的不确定性时，它们更不愿意投资，但如果它们已经是活动的时候，它们也更不愿意放弃。这当然就是我们在第 5 章和第 6 章所讨论过的保持原状下的期权价值的分叉点。[4]在以数值模拟考察过其数量意义之后，我们将在下面讨论其含义。

7.1.3 静态比较

尽管界定临界值的方程是高度非线性的，而且确实没有确切形式的解，但对应于外生参数较小变化的全微分跟以往一样是线性的，这使得至少对一些参数来讲得到定性的静态比较结论相对更简单。另外，一些利率参数，如 r、$\delta=\mu-\alpha$ 和σ，进入了根为 β_1 和 β_2 的二次方程，因此，这些参数的变化对函数 G 有复杂的影响。这使得静态比较的解析表达式非常难以解释，而且我们必须回到数值模拟。另外一些参数，如 I，E 和C，有比较简单的影响，而且有助于阐述一般方法。我们详细地考虑投资成本 I，其他两个也类似。

利用函数 G 开展工作仍然是有用的，它有助于说明 G 对期权价值系数

上海老股票论坛 bbs.gulaogu.com

的依赖，因此我们记作$G(P, A_1, B_2)$。价值匹配与平滑粘贴条件为

$$G(P_H, A_1, B_2) = I, \quad G(P_L, A_1, B_2) = -E \tag{7-14}$$

$$G_P(P_H, A_1, B_2) = 0, \quad G_P(P_L, A_1, B_2) = 0 \tag{7-15}$$

现在假定 I 以 $\mathrm{d}I$ 变化，考虑这四个内生性变量 A_1，B_2，P_L 和 P_H 做何反应。从价值匹配条件式（7-14）的全微分开始，用跟以往一样的符号来表示 G 的偏微分，为简化起见，记$G_A(P_H, A_1, B_2) = G_A(H)$等。我们有 222

$$G_A(H)\mathrm{d}A_1 + G_B(H)\mathrm{d}B_2 = \mathrm{d}I$$

$$G_A(L)\mathrm{d}A_1 + G_B(L)\mathrm{d}B_2 = 0$$

注意到，由于平滑粘贴条件式（7-15），$G_P(H)\mathrm{d}P_H$ 与 $G_P(L)\mathrm{d}P_L$ 项消失了。因此，关于四个内生性变化的 $\mathrm{d}A_1$，$\mathrm{d}B_2$，$\mathrm{d}P_L$ 和 $\mathrm{d}P_H$ 的一般静态比较系统实际上分成了更简单的系统。首先，我们对期权价值系数中的变化 $\mathrm{d}A_1$，$\mathrm{d}B_2$ 来求上述两个方程的解。其次，我们可以对平滑粘贴条件进行全微分，以掌握临界价格 $\mathrm{d}P_H$，$\mathrm{d}P_L$ 的变化。

注意，$G_A(H) = -P_H^{\beta_1}$ 等，其解为

$$\mathrm{d}A_1 = -P_L^{\beta_2}\frac{\mathrm{d}I}{\Delta}, \quad \mathrm{d}B_2 = -P_L^{\beta_1}\frac{\mathrm{d}I}{\Delta}$$

式中

$$\Delta = P_H^{\beta_1}P_L^{\beta_2} - P_H^{\beta_2}P_L^{\beta_1}$$

由于 $P_H > P_L$ 且 $\beta_1 > 0 > \beta_2$，因此它为正。

在点 P_H 对式（7-15）进行微分，并写作

$$G_{PP}(H)\mathrm{d}P_H + G_{PA}(H)\mathrm{d}A_1 + G_{PB}(H)\mathrm{d}B_2 = 0$$

它导出

$$G_{PP}(H)\mathrm{d}P_H = -(\beta_1 P_H^{\beta_1-1}P_L^{\beta_2} - \beta_2 P_H^{\beta_2-1}P_L^{\beta_1})\frac{\mathrm{d}I}{\Delta}$$

由于$G(P)$在 P_H 是凹的，$G_{PP}(H)$ 为负，且当 $\mathrm{d}I > 0$ 时，$\mathrm{d}P_H > 0$。投资临界值随着投资成本的提高而提高。正如我们所预期的，当 E 上升时，P_L 下降。

同样地，较低的光滑粘贴条件给出：

$$G_{PP}(L)\mathrm{d}P_L = -(\beta_1 - \beta_2)P_L^{\beta_1-\beta_2-1}\frac{\mathrm{d}I}{\Delta}$$

由于 $G_{PP}(L) > 0$，当 $\mathrm{d}I > 0$ 时，我们有 $\mathrm{d}P_L < 0$：当投资成本升高时，放弃的临界值下降。这种成本与临界值之间重要的相互作用也应当反映在直觉

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

中。由于期权价值，企业会不情愿地放弃正在进行的项目。通过保持该项目的存在，它避免了必须再次承受全部的投资成本，价格过程在未来也变得充
223 分有利。因此，投资成本越高，这一期权的价值也越高，那么不愿意放弃的意愿也越强。镜像结论，即投资的临界价格 P_H 随着放弃成本 E 的提高而升高，可能更加清楚了。如果在未来储存该项目时可能会承受较大的成本，企业更不愿意开发项目。

如果我们评价当 I 和 E 两者都趋于零时这些静态比较变量的导数，我们会发现，P_H，P_L 两者都趋向于 C，但是 $\mathrm{d}P_H\to\infty$ 且 $\frac{\mathrm{d}P_L}{\mathrm{d}I}\to-\infty$，对 E 也有类似的结论。这样，进入与退出的临界值开始非常快地分化，即使是对很小的进入与退出的成本也是如此。将式（7－14）与式（7－15）中的四个方程以泰勒级数展开，并且进行一些冗长乏味的代数计算，迪克西特（Dixit，1991）发现：

$$\log\left(\frac{P_H}{P_L}\right)=k(I+E)^{\frac{1}{3}} \tag{7-16}$$

式中，k 为一常数。换句话说，三阶小量的（当 ϵ 很小时，与 ϵ^3 成比例）进入和退出成本导致了一阶小量（与 ϵ 成比例）的进入与退出临界值之间的差距。这样，非常小的沉没成本对企业的决策有着不成比例的巨大影响。

另外，很小的成本对临界值的影响是完全对称的：进入临界值所受退出成本的影响正好与进入成本对它的影响一样强烈。对更大的数量级，每种成本将更强烈地影响到其"自身"的临界值。理由在直观上是很清楚的。考虑一家正在打算进入的企业，进入成本必须立即支付，而退出成本只是通过企业在未来某一时刻必须支付它的前提下才影响到企业的进入决策的。由于贴现，瞬时影响是较强的一种。然而，如果成本非常小，这些临界值相互之间非常接近，几乎可以确定，布朗运动可以非常迅速地到达另一个临界值。因此，由贴现所引起的差别很小，并且在极限状态会消失。

我们把 C 上升时，P_H，P_L 都上升的证明作为练习留给读者。正如人们所期望的，具有较高经营成本的项目是在企业更不情愿的条件下进行的，而且会更快地被放弃。

7.1.4 一个例子：铜矿业的进入与退出

我们已经看到，未来需求条件的不确定性提高了企业不行动的区域，

它使得最优投资与放弃的临界值比传统的两个马歇尔临界值分离得更远。在实践中，这种不行动区域变得有多大？像我们已经所做的那样来解释不可逆性和不确定性真的有必要吗？或者简单的马歇尔规则提供了一种对大多数投 224
资与放弃决策的足够好的近似吗？为回答这些问题，考察一个特殊的例子是非常有用的。

我们考察对某一新的铜加工设施进行投资的决策——采矿、冶炼及提纯的混合——以及永久性放弃一个正在经营的加工厂的决策。历史上，铜的价格波动很大。（在过去的20年里，铜价的年变化在20%～50%之间。）此外，开发或关闭一座矿山或冶炼炉包含着非常高的沉没成本，因此，铜生产者需要非常小心谨慎地作出进入和退出决策，并且将不确定性考虑进来。

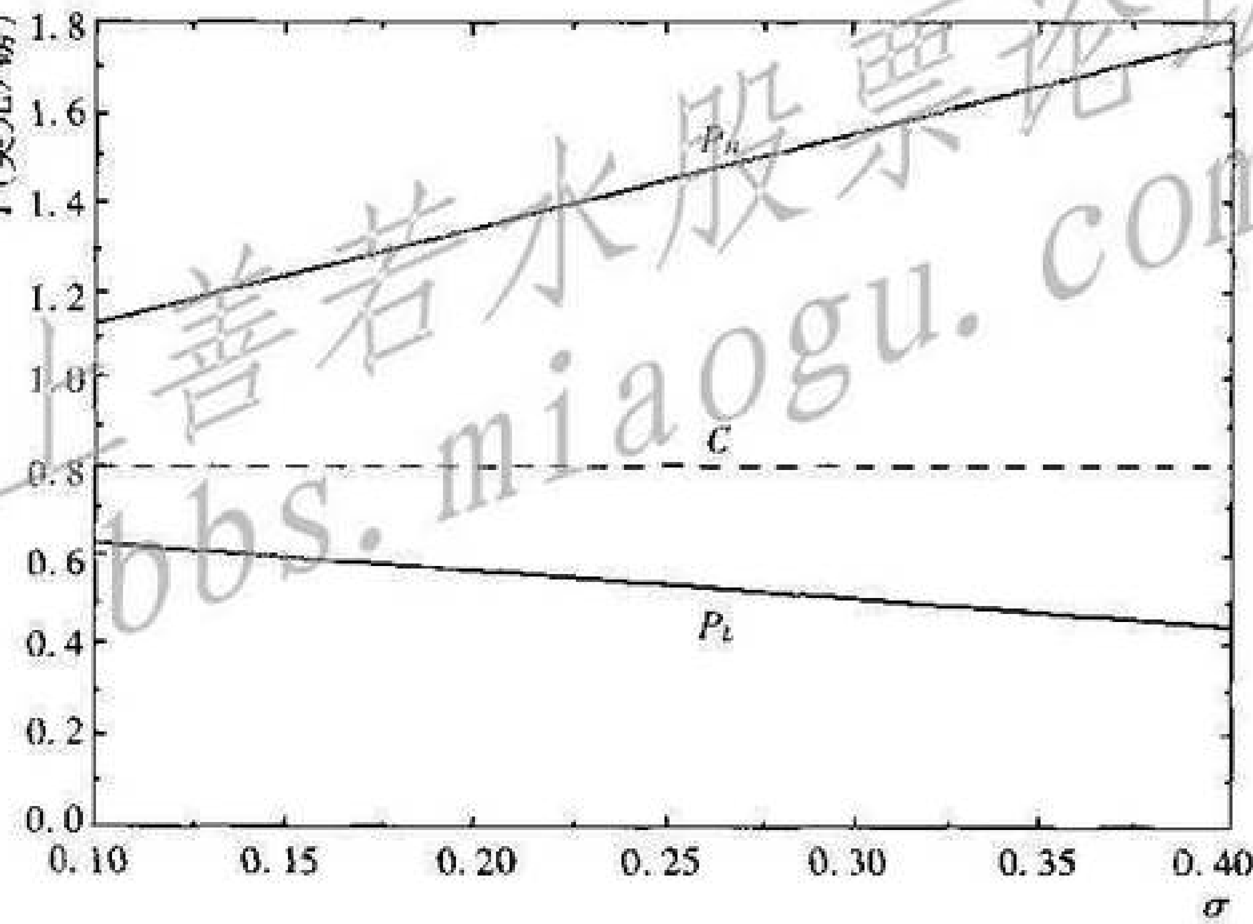
在现实中，拥有正在运营的铜矿的生产者拥有永久放弃或连续经营这两种选择权。铜矿必须被暂时地"封存"，等以后价格上升时再重新启动。封存或重新启动都包含着沉没成本（在矿井不活动时，需要进行建设以防止洪水淹没或塌方；为重新启动矿井也需要额外的开支），以及不断产生的固定成本（将水排出、防止未经授权的进入等）。然而，如果在不远的将来重新启动的可能性很高，封存可能仍然比放弃并且在以后从零开始建设一座新矿山要便宜得多。在下一节，我们将推广进入与退出的基本模型，把封存和重新启动的可能性包括进来。然而，现在我们将忽略这种额外的选择，而仅仅考虑投资与放弃。[5] 同样地，生产者也可以开放或关闭一座矿山，而非一家冶炼厂。为简化起见，我们将把冶炼铜的生产看做一个一体化的操作。

我们考虑一家每年生产1 000万磅纯铜的加工厂。为保持分析的简单，我们忽略这样一个事实，即矿藏储备是有限的，最终将会耗尽；代之以假定该矿山可以永久运营。（这并不是一个非常极端的假定，因为大部分铜矿至少可以运营20年～30年。）这样一家采矿、冶炼与提纯企业的建造成本的合理数量为 $I=2\ 000$ 万美元，而其放弃成本（主要是清洁及环境恢复）为 $E=200$ 万美元。（这些数据及其他数据都以1992年的不变美元计。）在美国，企业间生产的平均可变成本是变化的，而国家之间企业的平均可变成本变化更大。我们将可变成本设定为 $C=0.80$ 美元/磅，大约为1992年美国 225
生产者的平均值，但是我们还将改变这一成本，以确定其对进入和退出临界值的影响。（为了进行比较，1992年铜的平均价格为1.00美元/磅，但1985—1992年，它曾经下降到0.60美元/磅，也曾经上升到1.50美元/磅。）

对铜矿或提纯企业的实际的经风险调整的年回报率的合理值为 $\mu=$

0.06，便利收益（或回报不足）的平均比率为 $\delta=\mu-\alpha=0.04$，而实际的经风险调整的利率为 $r=0.04$。最后，我们将把 0.2 看做波动参数 σ 的基本值。我们也将考虑这个参数在 0.1～0.4 的范围内的值，这与对不同时间阶段变化的估计相一致。[6]

给定这些参数的值，式（7－9）～式（7－12）可以对常数 A_1，B_2 以及进入和退出的临界值 P_H，P_L 求出数值解。图 7—2 显示了进入与退出临界值 P_H，P_L 作为波动性参数 σ 的函数。注意到 $\sigma=0.2$ 时，这两个临界值大约分别为 1.35 美元和 0.55 美元。为了进行比较，如果未来价格中没有不确定性（$\sigma=0$），临界值为 0.88 美元和 0.79 美元。[7]因此，一个非常适中的不确定性的数量级引起了不活动区域的大幅上升——从 $0.88-0.79=0.09$ 美元增加到 $1.35-0.55=0.80$ 美元。注意，这一区域随着 σ 的增加而增加；如果 $\sigma=0.4$，这一区域的范围大约为 1.30 美元。



上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

图 7—2　铜业：作为 σ 的函数的进入与退出临界值

图 7—3 与图 7—4 显示了进入与退出临界值对营运成本 C，以及退出沉没成本 E 的依赖。可以观察到，当运营成本上升时，P_H 和 P_L 都将提高。较高的运营成本减少了来自项目的利润的预期流量，从而降低了项目的价值，因此，在企业愿意投资之前较高的价格是必需的。此外，在较高的临界价格上，企业将放弃，因为当 C 更高时，它将失去更多的货币。

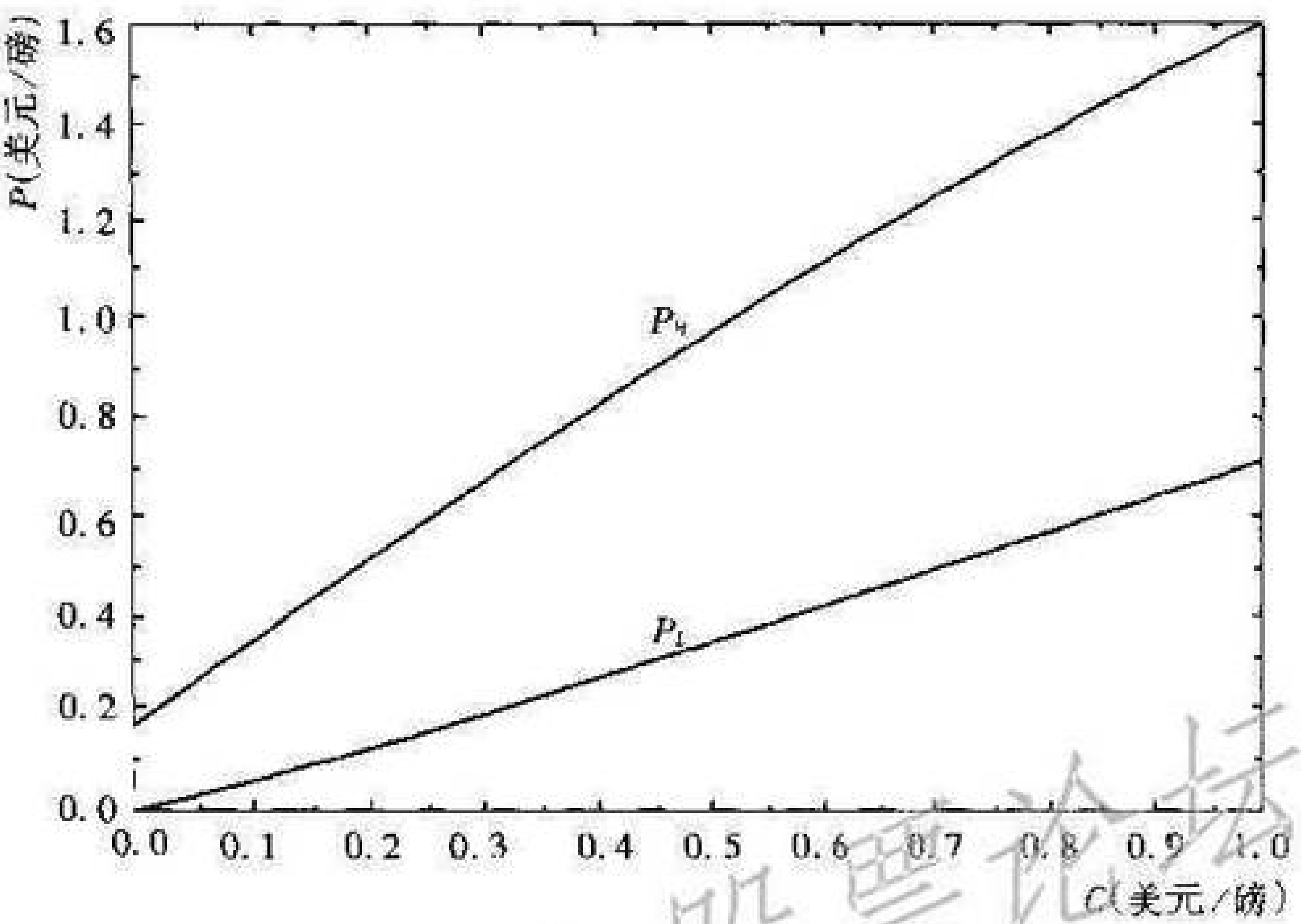


图 7—3　作为经营成本 C 的函数的进入与退出临界值，$\sigma=0.2$

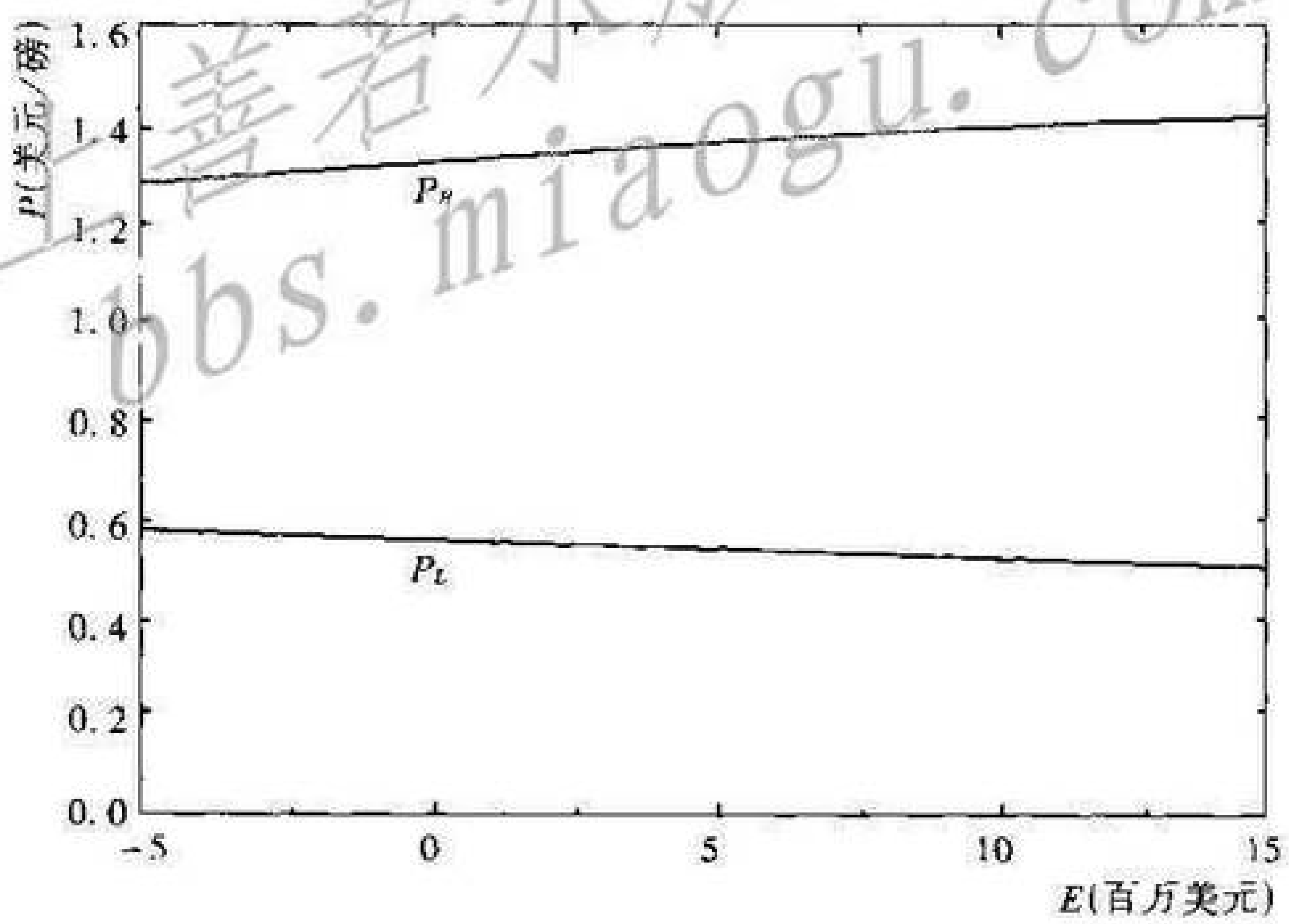


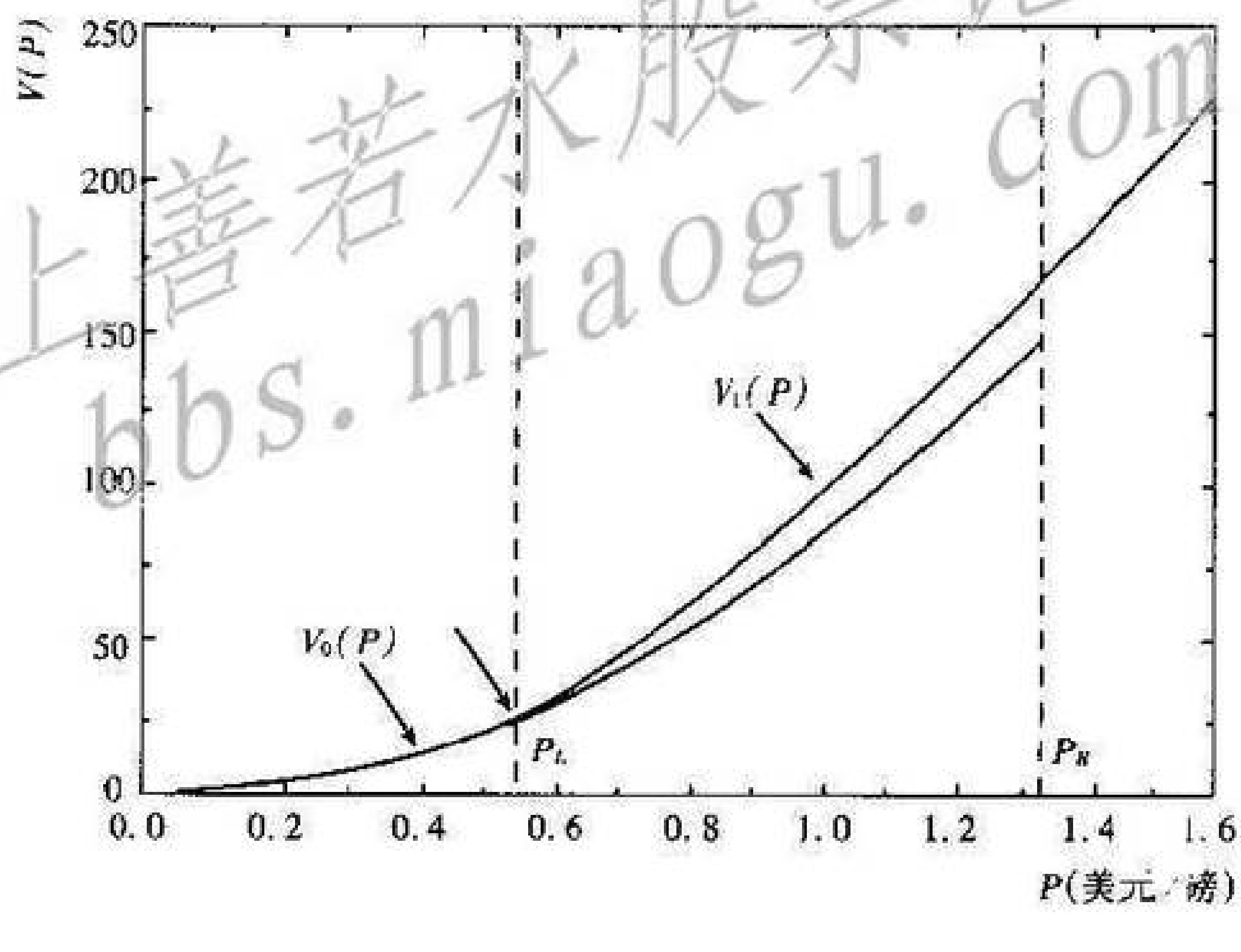
图 7—4　作为放弃成本 E 的函数的进入与退出临界值，$\sigma=0.2$

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

当放弃成本 E 增加时，可以观察到进入临界值 P_H 也会提高。理由是， 226
对任何价格 P，更高的 E 降低了放弃一个活动项目的期权价值，从而降低。

了项目价值，这反过来意味着企业愿意在第一种情形下投资之前的价格必须更高。类似地，E 的增加降低了放弃临界值 P_L；企业必须支付更多以执行其放弃期权，因此，在企业愿意放弃之前，价格必须下降得更多。然而，注意当 E 增加时，P_H 上升而 P_L 下降，但它们提高或下降得并不是太多，原因是放弃期权的价值主要是由 σ 及更高的进入成本 I 所决定的，而当 E 变化时却不会有很大的变化。

图 7—5 显示了空闲企业的价值 $V_0(P)$ 和活动企业的价值 $V_1(P)$，两者都是价格 P 的函数。（我们利用了基本情形下的参数值：$I=2\,000$ 万美元，$E=200$ 万美元，$C=0.80$ 美元/磅，$r=\delta=0.04$ 及 $\sigma=0.2$。）图中还显示了临界值 P_H 和 P_L。注意到，在 $P=P_L$ 时，$V_0(P)$ 通过放弃成本 $E=2$ 超过了 $V_1(P)$。由于在这一价格水平上，执行放弃期权是最优的，即放弃 $E+V_1$ 而获得 V_0。类似地，在 $P=P_H$ 时，投资是最优的，因此 $V_1=V_0+I$。



228

图 7—5　作为 P 的函数的 $V_0(P)$ 和 $V_1(P)$

最后，图 7—6 显示了函数 $G(P)=V_1(P)-V_0(P)$。注意，在 P_L 与 P_H 之间的不行动区域内，这条曲线呈 S 形，并且在 $P=P_H$ 时，与水平线相切于 I；在 $P=P_L$ 时，与水平线相切于 $-E$。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

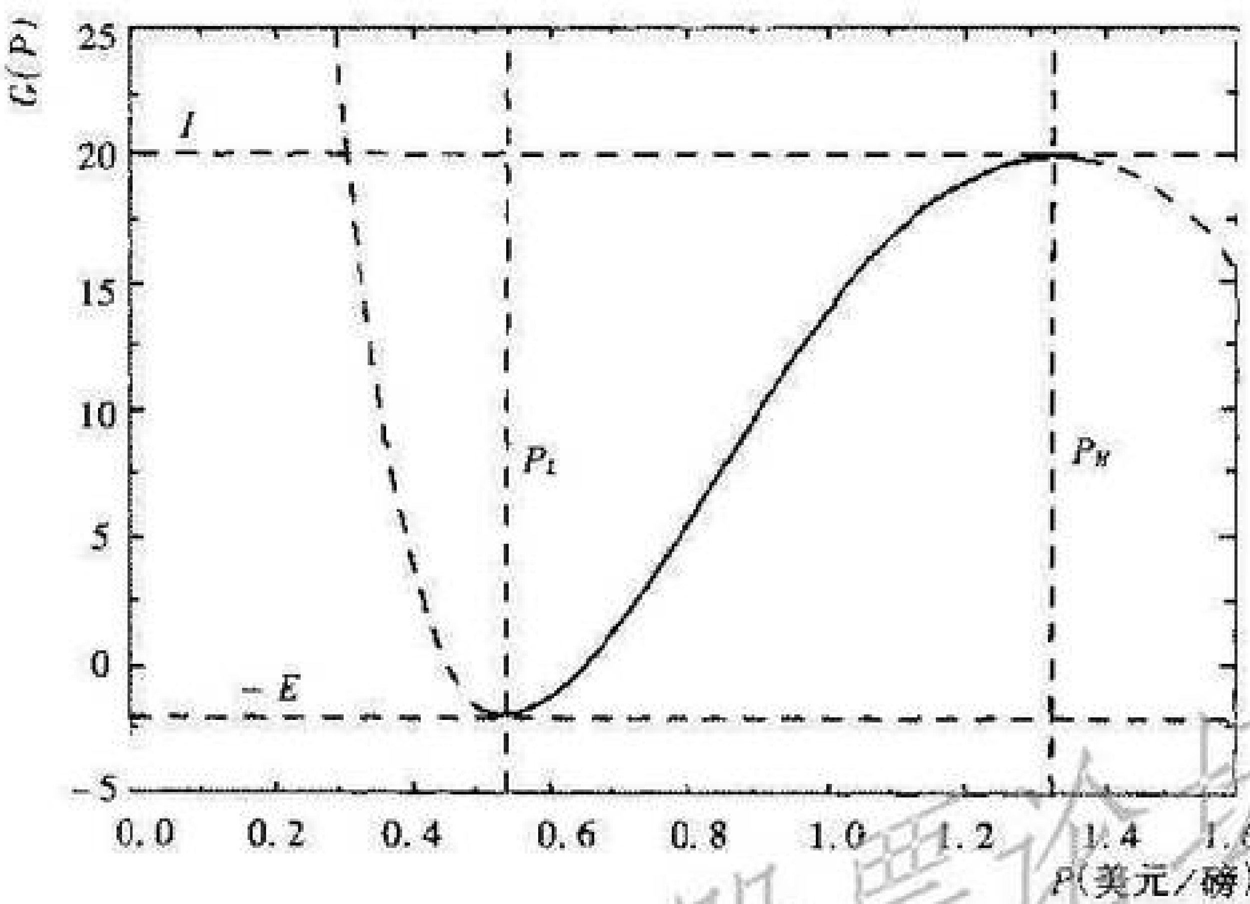


图 7—6　$G(P)=V_1(P)-V_0(P)$

这个例子有助于我们理解在过去20年间美国及其他地方的铜生产者的行为。在价格非常低的阶段（例如，在20世纪80年代中期，当铜的价格下降到自大萧条以来最低的水平时），企业经常继续经营那些在价格很高时开张的现在却没有盈利的矿山及冶炼厂。在价格很高的另一段时间内，企业在投资于新的矿山或重新开放在价格非常低的时候所关闭的现在似乎有盈利的矿山方面失败了。生产者对不确定性的反应对价格水平自身有一种反馈效应。在20世纪80年代，当需求非常微弱时企业对关闭矿山的不情愿态度使得铜的价格比其他情形下下降得更多。

我们这里假定，铜的价格决定过程对企业来讲是外生的。在第8章，我们将说明，竞争性生产的商品价格如何能在产业行为的均衡模型中内生地被决定。在那里，我们将回到关于铜产业的进入与退出的例子，但是竞争性均 229
衡的背景是价格为内生的。

7.2　储存、重新启动与废弃

正如前面所提到的，当铜的价格下降时，除了永久性放弃一个正在运营

的矿山外，铜生产者还有其他的选择。实际上，矿山可以被置于一种临时搁置的状态，并允许它在将来以大大低于从零开始新建一座矿山的成本的沉没成本重新启动。"封存"的工厂或"储存"的轮船就是这种暂时性搁置的例子。

与永久性放弃一样，封存也需要沉没成本，我们把它记做 E_M。此外，一旦工厂被封存，维护该资本品需要一定的成本流 M 运营，以在将来以进一步的沉没成本 R 来重新启动。只有当维护费用 M 小于实际的运营成本
230 C，以及重新启动的成本 R 小于新投资的成本 I 时，封存才是合理的。我们假定，这些条件实际上都满足。我们的目的是决定一个正在运营的项目的价值，投资于这样一个项目的机会的价值、以及投资、封存、重新启动和废弃该项目的决策规则如何受到各种成本 I，E_M，M 和 R 及产出价格波动的影响。

与以前一样，我们将假定价格服从几何布朗运动式（7－1）。企业必须在考虑未来价格的不确定性的条件下决定是否以及何时封存一家工厂。直觉表明有下面的一般情形。我们从下面这样一种情形开始，即企业没有任何类型的启动资本。如果价格上升到临界值 P_H 时，企业作出投资。如果价格下降到另一个临界值 P_M，则企业将暂停一个正在运营的项目。给定一个封存中的项目，如果价格上升到第三个临界值 P_R，企业将重新启动它。由于重新启动的成本小于从零开始投资的成本，我们预期 $P_R < P_H$。如果实际上价格下降，假定重新启动是充分不可能的或者是非常遥远的一件事，则存在第四个临界值 P_S，在这一点，已经封存的项目将会被完全废弃以节约维护费用。企业将重新回到初始的空闲状态。

当然，所有这些临界值 P_H，P_M，P_R 和 P_S 都是内生的，而且必须由基本的参数来决定。更基础地，我们必须考虑企业如何发现利用封存期权从整体上是最优的。如果维护费用 M 充分高，或者重新启动成本 R 没有充分小于全部的投资成本 I，则企业可能会发现，如果价格到达一个更低的临界值 P_L 时，直接废弃一个正在运营的项目会更好。在这种情形下，我们回到了前面的模型。我们必须内生性地确定在企业的最优策略中是否有封存迹象。

7.2.1 最优转换的规则

在前面，我们用 E 来表示一项活动的项目的放弃成本。现在我们

令 E_M 表示一个正在运营的项目的废弃成本，而 E_S 表示早已在封存中的项目的废弃成本。（在采矿业中，前者可能是雇用矿工的成本，而后者为厂址恢复的成本。在轮船的情形下，后者可能为负，表示废弃价值。）为保持说明的简单，我们将假定 $E_M+E_S=E$，因此，直接放弃一个活动项目的成本正好是先封存该项目的成本与再废弃已封存项目的成本之和。在实践中，当项目要经历封存阶段时由运营到完全废弃它的代价可能更高或更低。修造轮 231
船并将轮船从船坞移进或移出、维修的成本可能会发生两次，但如果一种更渐进的路线允许通过退休或辞退减少劳动力，这可能会节约一定的劳动力解雇成本。我们把由这种非附加的成本所提出的问题留给读者来考察。

类似的考虑适用于投资成本 I。原则上，人们可以认为，以成本 J 来装备一个处在封存状态的项目，然后在以后以成本 R 来重新启动它。然而，我们没有发现为什么这种间接路线会比简单地投资于一个正在运营的项目更便宜的理由。因此，企业将永远不会发现采取这种路线是最优的，它将永远不会投资于一个封存的项目。通过将项目推迟到运转的那一刻，它可以推迟支出第一笔的资本成本 J 并节约流量为 M 的维修费用。[8]

这使得我们在考虑三种状态下可以想到的六种可能的转换中去掉了一种转换。在剩下的五种转换中——空闲到活动、活动到封存、封存到废弃、封存到活动，以及活动到废弃——如果封存实际上是最优策略的一部分，前四种转换会被使用。否则，只有第一种和最后一种会被使用。我们在这种假定下进行分析，即当价格下降到一定水平，封存得到使用，然后决定其在分析的时间区间内波动的极限。

我们继续用0与1来表示空闲与运营状态，而且对封存状态引入了另外的符号 m。我们找到了每种状态下作为预期利润或成本流及转换期权的混合的企业价值，方法实际上与本章前面及第5章和第6章所用的方法一样，因此，我们将概括地叙述分析并省略了许多细节。

在价格区间 $(0,\ P_H)$ 内，企业可能处于空闲状态，则其价值再次由前面的式（7－4）给出：

$$V_0(P)=A_1P^{\beta_1}$$

式中，A_1 为需要确定的常数，这正好是投资期权的价值。我们与以往一样，利用当 $P\to 0$ 时，$V_0(P)$ 必须趋于零这样一个事实去掉了含有负幂 β_2 的项。

类似地，在区间 $(P_M,\ \infty)$ 内，运营状态可能会盛行，企业的价值再 232

次由前面的式（7－6）给出：

$$V_1(P)=B_2P^{\beta_2}+\frac{P}{\delta}-\frac{C}{r}$$

式中，常数 B_2 仍然需要确定。在前面的章节所讨论的模型中，$B_2P^{\beta_2}$代表放弃期权的价值，现在这一项为封存期权的价值。与前面一样，另外两项给出了永远持续运营的预期现值。当然，封存期权的价值是由重新启动或废弃的更进一步的可能性推导出来的。

封存状态在某一价格范围（P_S，P_R）内会持续。由于零或无穷都不包括在这个区间内，我们不能消去解中期权价值部分的正幂或负幂。因此，封存项目的价值由式（7－17）给出：

$$V_m(P)=D_1P^{\beta_1}+D_2P^{\beta_2}-\frac{M}{r} \tag{7-17}$$

式中，常数 D_1 和 D_2 仍然需要确定。式（7－17）中的第一项为重新启动已封存项目的期权价值，第二项为废弃该项目的期权价值，第三项为简单资本化的维护成本，假定项目将永远处于封存状态之中。

在每一个转换点，我们有适当的价值匹配条件及平滑粘贴条件。对初始投资，这些条件为

$$V_0(P_H)=V_1(P_H)-I,\quad V'_0(P_H)=V'_1(P_H)$$

对封存状态，这些条件为

$$V_1(P_M)=V_m(P_M)-E_M,\quad V'_1(P_M)=V'_m(P_M)$$

对重新启动，这些条件为

$$V_m(P_R)=V_1(P_R)-R,\quad V'_m(P_R)=V'_1(P_R)$$

最后，对废弃，这些条件为

$$V_m(P_S)=V_0(P_S)-E_S,\quad V'_m(P_S)=V'_0(P_S)$$

这八个方程决定了四个临界值 P_H，P_M，P_R，P_S 及四个期权价值相关系数A_1,B_2，D_1，D_2。我们可以正式地解出这些方程，但必须考虑其
233 解是否有经济意义，因此，要确定对封存期权被真正使用的参数范围的限制。

最有前途的出发点是封存与重新启动之间的相互作用。利用上面的函数形式，在这两个临界点的四个方程变为

$$-D_1P_R^{\beta_1}+(B_2-D_2)P_R^{\beta_2}+\frac{P_R}{\delta}-\frac{C-M}{r}=R \tag{7-18}$$

$$-\beta_1 D_1 P_R^{\beta_1-1}+\beta_2(B_2-D_2)P_R^{\beta_2-1}+\frac{1}{\delta}=0 \tag{7-19}$$

$$-D_1 P_M^{\beta_1}+(B_2-D_2)P_M^{\beta_2}+\frac{P_M}{\delta}-\frac{C-M}{r}=-E_M \tag{7-20}$$

$$-\beta_1 D_1 P_M^{\beta_1-1}+\beta_2(B_2-D_2)P_M^{\beta_2-1}+\frac{1}{\delta}=0 \tag{7-21}$$

我们可以把这看做关于四个未知数 $D_1,(B_2-D_2),P_R$ 和 P_M 的四个方程组，并对它自身求解。另外，将式（7－18）～式（7－21）与式（7－9）～式（7－12）进行比较，这一方程组实际上与我们在前面对没有封存期权条件下投资与放弃的情形下所讨论的方程组有相同的形式。我们仅仅需要重新把 R 解释为投资成本，E_M 解释为放弃成本，（$C-M$）解释为运营成本即可。那么，P_R 就如同前面的投资临界值，而 P_M 如同放弃临界值。

为了继续与前面的模型进行类比，让我们把 $H(I,E,C)$ 界定为较高的临界值，而把 $L(I,E,C)$ 界定为较低的临界值，从而来解决投资—放弃系统，每一个都被表达成一次性成本及成本流的函数。回忆我们的静态比较结论：函数 H 和 L 两者都随成本项 C 的流量而递增，函数 H 随着 I 和 E 而递增，而函数 L 关于这两项为递减。现在，当前的模型中，重新启动及封存的临界值可以写成下列形式：

$$P_R=H(R,E_M,C-M),\quad P_M=L(R,E_M,C-M)$$

现在转到前面的八个方程中剩余的四个方程。关于新投资的价值匹配与平滑粘贴条件是非常熟悉的：

$$-A_1 P_H^{\beta_1}+B_2 P_H^{\beta_2}+\frac{P_H}{\delta}-\frac{C}{r}=I \tag{7-22}$$

$$-\beta_1 A_1 P_H^{\beta_1-1}+\beta_2 B_2 P_H^{\beta_2-1}+\frac{1}{\delta}=0 \tag{7-23}$$

在废弃临界点，这些条件变为

$$(D_2-A_2)P_S^{\beta_1}+D_2 P_S^{\beta_2}-\frac{M}{r}=-E_S \tag{7-24}$$

$$\beta_1(D_1-A_1)P_S^{\beta_1-1}+\beta_2 D_2 P_S^{\beta_2-1}=0 \tag{7-25}$$

这些方程中有六个未知数——临界值 P_H，P_S 及系数 $A_1,B_2,(D_1-A_1)$ 和 D_2。然而，上面四个方程的第一组的解给我们提供了系数之间的联系，我们已知 $D_1=(D_1-A_1)+A_1$ 及 (B_2-D_2)，因此我们完成了解。 234

这个系统太复杂以至于不能解析性地掌握它，所以我们将提供一些数值模拟，以提供对这个解的特征的更多的了解。然而，直觉表明了其解的一些

一般特征。首先,如果 M 和 R 两者都为零,则封存相当于无成本的推迟,我们又回到了第 6 章麦克唐纳-西格尔(McDonald and Siegel,1985)的基本模型。那么,引起封存与重新启动的行动会使得 M 和 R 在点 C 会合,而引起废弃的行动两者迅速跌落至零。现在考虑 R 和 M 的逐步提高,且每次只改变一个。

当 R 升高而 M 保持为常数时,重新启动的临界值 P_R 将提高而封存的临界值 P_M 将下降,当投资成本升高时投资与放弃临界值的变化与本章前面一样。重新投资的临界值 P_H 将升高;当重新启动代价更高时,封存期权不太有用,因此企业更不愿意投资。最后,当重新启动代价更高时,废弃临界值 P_S 也将升高,当价格下降时,企业不愿意持有一个封存的项目。

当保持 R 的提高时,封存的临界值 P_M 下降而废弃的临界值 P_S 上升。当封存成为最优策略的一部分时,必然有 $P_M > P_S$。因此,这两个临界值相交时的 R 值限定了与封存不再有关的参数空间的边界。将 P_C 写做在这一边界上的普通解,加上共同的 P_C 所满足的价值匹配条件式(7-20)和式(7-24),及相应的平滑粘贴条件式(7-21)和式(7-25),我们发现:

$$-A_1P_C^{\beta_1}+B_2P_C^{\beta_2}+\frac{P_C}{\delta}-\frac{C}{r}=-(E_M+E_S)=-E$$

$$-\beta_1A_1P_C^{\beta_1-1}+\beta_2B_2P_C^{\beta_2-1}+\frac{1}{\delta}=0$$

这实际上就是本章前面封存根本不存在时,临界值 P_H 和 P_L 满足的放弃方程式(7-11)和式(7-12),以及相应的一对投资方程式(7-9)和式(7-10)。这样,所有的情形完全与其应该表现出的情形相一致。对足够高的 R 值,企业忽略了封存的可能性,并且像以前一样,在空闲与活动状态之间转换。

下面保持 R 固定而提高 M。这会降低从封存中所节约的流动成本($C-M$)。因此,P_R 和 P_M 两者都下降,企业将不太愿意封存一个项目,而更愿
235 意重新启动一个已封存的项目。然而,P_H 和 P_S 升高,企业将更不愿意投资,而更愿意放弃一个封存的项目。当 M 上升到特定水平时,下降的 P_M 与上升的 P_S 再次相遇,对任何较高的 M 值,封存都不会被使用。

在限定了使用封存的边界的临界值 R 和 M 之间也存在一种权衡。当 R 较大时,M 的临界值将较小,反之亦然。

7.2.2 数值结论

现在我们转到证明这种直觉的数值解。最有意义的参数为维护成本流 M 及重新启动成本 R,为重点考察它们,在剩余的说明中我们将假定封存成

bbs.midogu.com

本 E_M 与废弃成本 E_S 均为零;因此,它们的和,即直接放弃的成本 E 也为零。我们还将简短地提供另一个数值例子,以说明这些参数不为零时的影响。

我们把 C 一般化为 $C=1$。我们假定一家风险中性的企业,$r=0.05$。价格的随机过程中 $\alpha=0$ 且 $\sigma=0.2$,则 $\mu=r=0.05$ 且 $\delta=\mu-\alpha=0.05$。投资的一次性成本为 $I=2$,不投资没有一次性成本,因此,$E=0$。在这些数值条件下,忽略封存的可能性,投资与放弃的临界值为 $P_H=1.597\ 7$,$P_L=0.713\ 5$。

现在允许封存,并考虑两种情形,$M=0.01$ 和 $M=0.05$。对每一种情形,我们考虑 R 值的范围。这四个临界值的最终值如表7—1所示。对固定的 M 而言,R 变化的影响可以从这里详细说明的每种情形下看到。在情形1,维护费用很低,$M=0.01$。现在封存在某一价格范围被采用,直到临界的极限 $\bar{R}\approx1.76$;一旦 R 超过了这个 $\bar{R}$,封存永远不会被采用。随着 R 在 $(0,\bar{R})$ 范围内升高,(1) P_H 提到没有封存的水平;(2) P_M 下降且 P_S 上升,直到 $R=\bar{R}$,两者在 P_L 相遇;(3) P_R 上升,只有当 R 到达 $\bar{R}$ 时,才会变得与此无关。

表7—1　封存与放弃的临界值

$(r=0.05,\ \delta=0.05,\ \sigma=0.2,\ C=1,\ I=2,\ E=0)$

情形1:较低的成本 $M=0.01$				
R	P_H	P_R	P_M	P_S
0.2	1.557	1.202	0.832 2	0.293 7
0.4	1.568	1.272	0.798 7	0.317 1
0.6	1.576	1.325	0.777 0	0.342 4
0.8	1.582	1.372	0.760 8	0.371 3
1.0	1.587	1.413	0.747 8	0.406 1
1.2	1.591	1.451	0.736 9	0.449 8
1.4	1.594	1.487	0.727 6	0.508 5
1.6	1.597	1.521	0.719 5	0.595 5
1.763 4	1.598	1.548	0.713 5	0.713 5
情形2:较高的成本 $M=0.05$				
R	P_H	P_R	P_M	P_S
0.1	1.577	1.108	0.824 6	0.524 0
0.2	1.583	1.157	0.796 8	0.543 0
0.3	1.587	1.194	0.778 3	0.561 2
0.4	1.590	1.225	0.764 4	0.579 3

上善若水股票论坛 bbs.mlaogu.com

续前表

R	P_H	P_R	P_M	P_S
0.5	1.592	1.253	0.753 0	0.597 8
0.6	1.594	1.278	0.743 4	0.617 0
0.7	1.596	1.301	0.735 1	0.637 1
0.8	1.597	1.323	0.727 8	0.658 4
0.9	1.597	1.343	0.721 2	0.681 1
1.030 7	1.598	1.370	0.713 5	0.713 5

在情形 2，维护费用较高，$M=0.05$。封存在一个较小的范围内相关，$\bar{R}$ 仅稍大于 1。

从图 7—7 中比较容易看到一般模式。将 M 固定在一个相对较低的值上，各类临界值作为 R 的函数由图中的粗线表示。当 $R<\bar{R}$ 时，封存是最优策略的一部分。当 $R\geqslant\bar{R}$ 时，两个临界值 P_M 和 P_S 在 P_L 会合。当考虑较高的 M 值时，曲线转移到由细线所示的位置。P_M 曲线向下移动，P_S 曲线向上移动，两者在较低的 $\bar{R}$ 相遇。在新的较低的 $\bar{R}$ 水平，P_H 曲线向上移动到其最终的常数水平。P_R 曲线向下移动，只有当封存不再被使用，它才停止向下移动到达其最终的常数水平。还应当注意到，随着 R 从 0 点开始递增，重新开始与封存的临界值非常快地分开。由于我们已经设定封存的成本 $E_M=0$，这一对转换的总成本 $R+E_M$ 很小，我们有前面式(7－16)所示的三次根的例子。
236

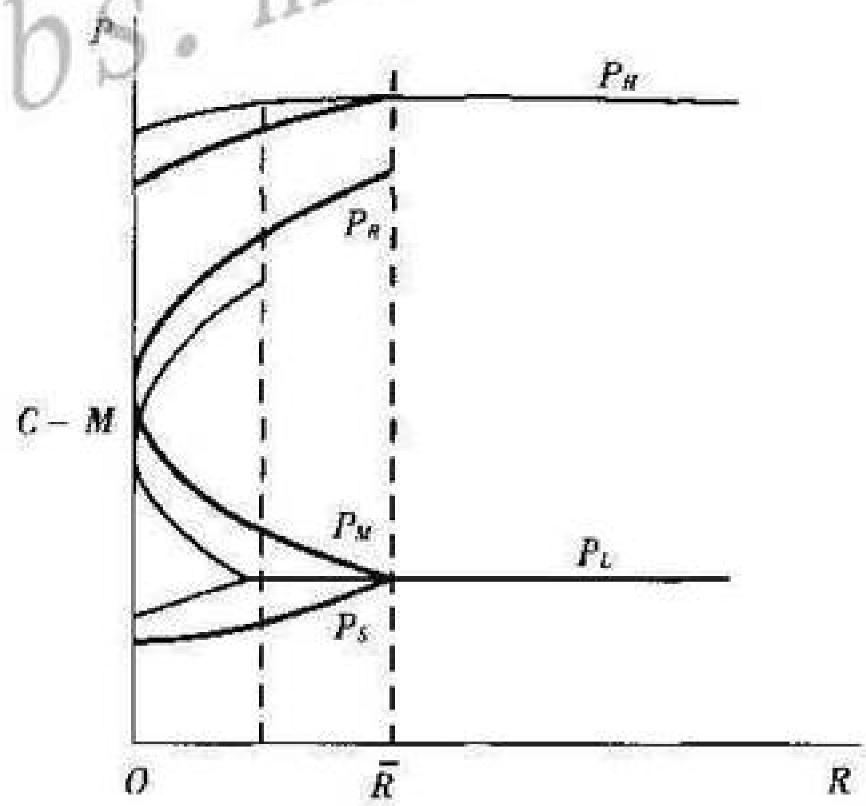


图 7—7 封存与放弃

上海股票论坛 bbs.miaogu.com

一种更进一步的数值试验很有趣，也就是让 R 和 M 两者都很小，从而把封存的模型推到我们在第6章中的模型的极限形式。这确实会发生，但是 237
接近极限的过程非常慢，因为存在不确定性时，即使很小的沉没成本也会有重大影响。那么，与以前一样，保持 $C=1$，即使我们把与封存有关的成本降低到 $M=0.001$ 及 $R=0.02$，我们也会发现，$P_R=1.089$ 及 $P_M=0.919$，每一个都离开它们的共同的极限值（即1）大约10%。废弃的临界值变为 $P_S=0.0963$，再次明显地高于其极限0。

7.2.3 例子：油轮的建造、封存及废弃

前面所提供的数值解有助于说明最优临界值对各类成本参数在质上的依赖。然而，对现实世界中最优投资、封存、重新启动及废弃决策的例子进行考察也是非常有用的。正如我们的铜矿业的例子，这可以给我们提供对沉没成本和不确定性的重要性的更好评价，而且也显示出模型如何能应用于实践。

我们将把我们的模型应用于油轮业。油轮业提供了一种特别好的例子，因为油轮的潜在的所有者或实际的所有者面临着相当大的利润不确定性，以及巨大的沉没成本。由于油轮市场的竞争非常激烈，所以会产生不确定性，
油轮的回报率（使用油轮的日收益，即我们模型中的 P）随着油价的波动、 238
石油生产的地理分布和石油消费的变化，以及油轮供给的变化等而大幅波动。而且，由于建造一艘新油轮以及维护或重新启动处于封存中的油轮的开支巨大，沉没成本也是重要的。

一般有四种规模的油轮：小油轮，载重量大约为35 000吨；中型油轮，载重量约为85 000吨；大型油轮，载重量约为140 000吨；以及从20世纪70年代中期以来出现的巨型油轮（VLCC's），载重量约为270 000吨。收益率以及建造、运营和其他成本不会随着油轮的载重量而直线上升，因此，投资、封存等经济学问题在这些不同类型的油轮间会有所变化。我们将集中于一种特定的类型——载重量为85 000吨的中型油轮。[9]

建造载重量为85 000吨级的新油轮的平均成本大约为 $I=4\ 000$ 万美元。（所有成本与收益都以1992年的美元计。）封存油轮的一次性成本为 $E_M=20$ 万美元，废弃一艘封存的油轮的成本为 $E_S=-340$ 万美元（即油轮有一个正的废弃值），重新启动一艘已封存的这种规模的油轮的成本为 $R=79$ 万美元。一艘封存的油轮的年维护成本为 $M=51.5$ 万美元。最后，给定

燃油及劳动力成本，这艘油轮 1992 年的年平均运营成本大约为 $C=440$ 万美元。在 1992 年，这艘油轮每年将获得的总收益大约为 $P=730$ 万美元。我们已经假定，P 服从几何布朗运动，该过程的漂移率 α 及波动率 σ 可以从关于总收入的实际时间序列的样本均值及样本方差中估计出来。利用从 1980—1992 年中期的季度数据，我们发现 $\alpha=0$，$\sigma=0.15$。最后，我们用 0.05 来表示实际的无风险利率 r 和经风险调整的利率 μ（因此 $\delta=0.05$）。[10]

图 7—8 显示了作为一次性重新启动成本 R 的函数的临界值 P_H，P_R，
239 P_M 和 P_S。注意到，我们的基本值为 79 万美元，1992 年的毛收入为每年 730 万美元，这对于重新启动一艘油轮来讲已经足够高了，但是正好低于投资于一艘新油轮所需的每年 950 万美元收入的临界收益。与这个结论相一致，实际上在 1992 年确实少有或根本没有在新油轮上的投资。观察到当 R 提高时，P_R 与 P_S 升高，而 P_M 下降，但不是非常快。只要重新启动的成本低于 270 万美元，封存仍然是一种可行的选择。投资的临界值 P_H 也随着 R 的上升而升高（尽管是如此之慢，以至于很难从图中分辨出来）；较高的 R 降低了油轮的价值，因此，提高了企业在愿意投资之前期望获得的收益。[11]

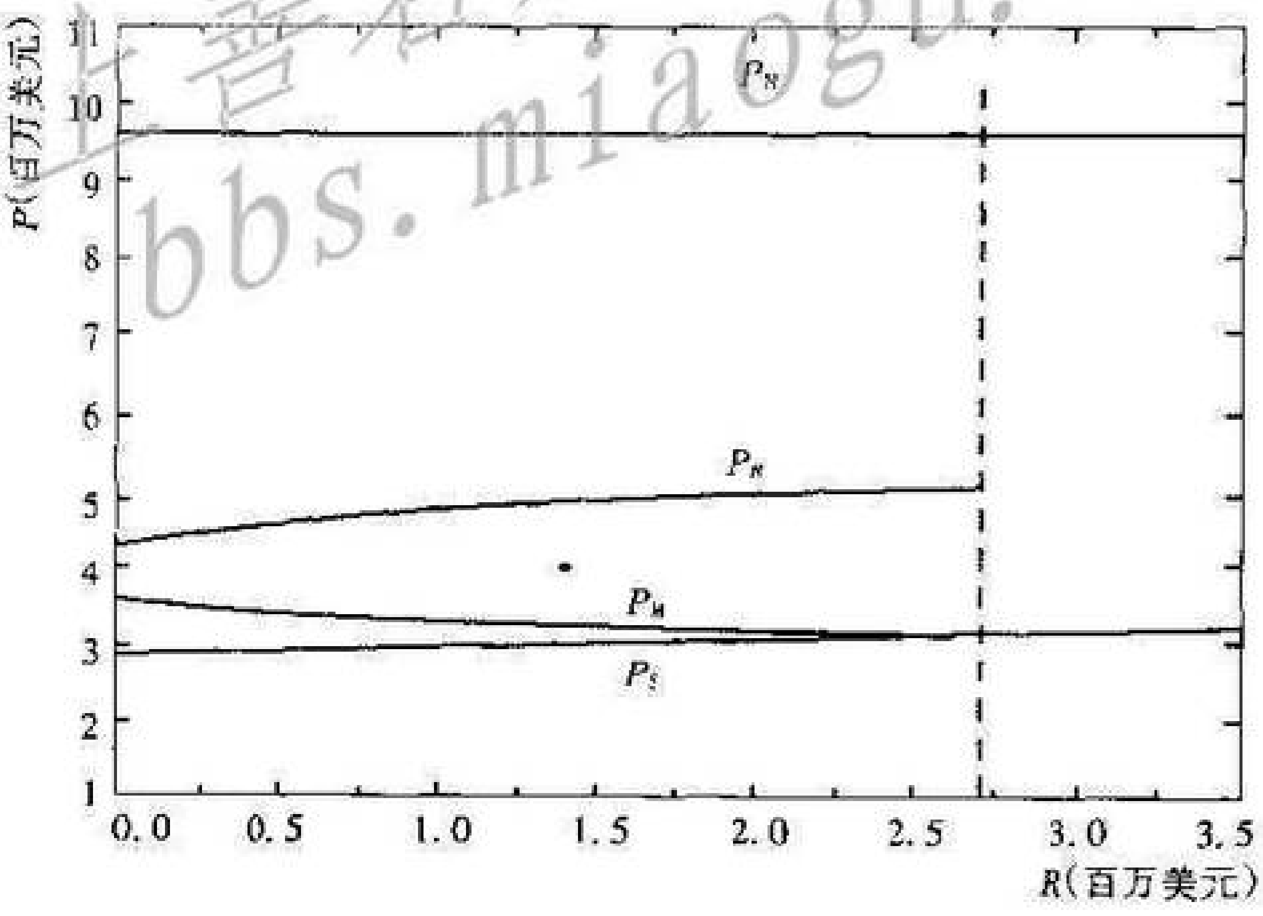


图 7—8　作为重新活动成本 R 的函数的临界值

图 7—9 显示了作为封存一艘正在运营的油轮的一次性成本 E_M 的函数

的最优临界值。注意临界值对 E_M 的定性依赖与它对 R 的定性依赖是一样 240
的。超过 100 万美元的 E_M 值是不现实的（考虑到我们的基本价值为20万美元），但是出于说明的目的，我们已经把这种较大范围包括在内了。注意只要 E_M 低于 210 万美元，封存仍然是一种选择。

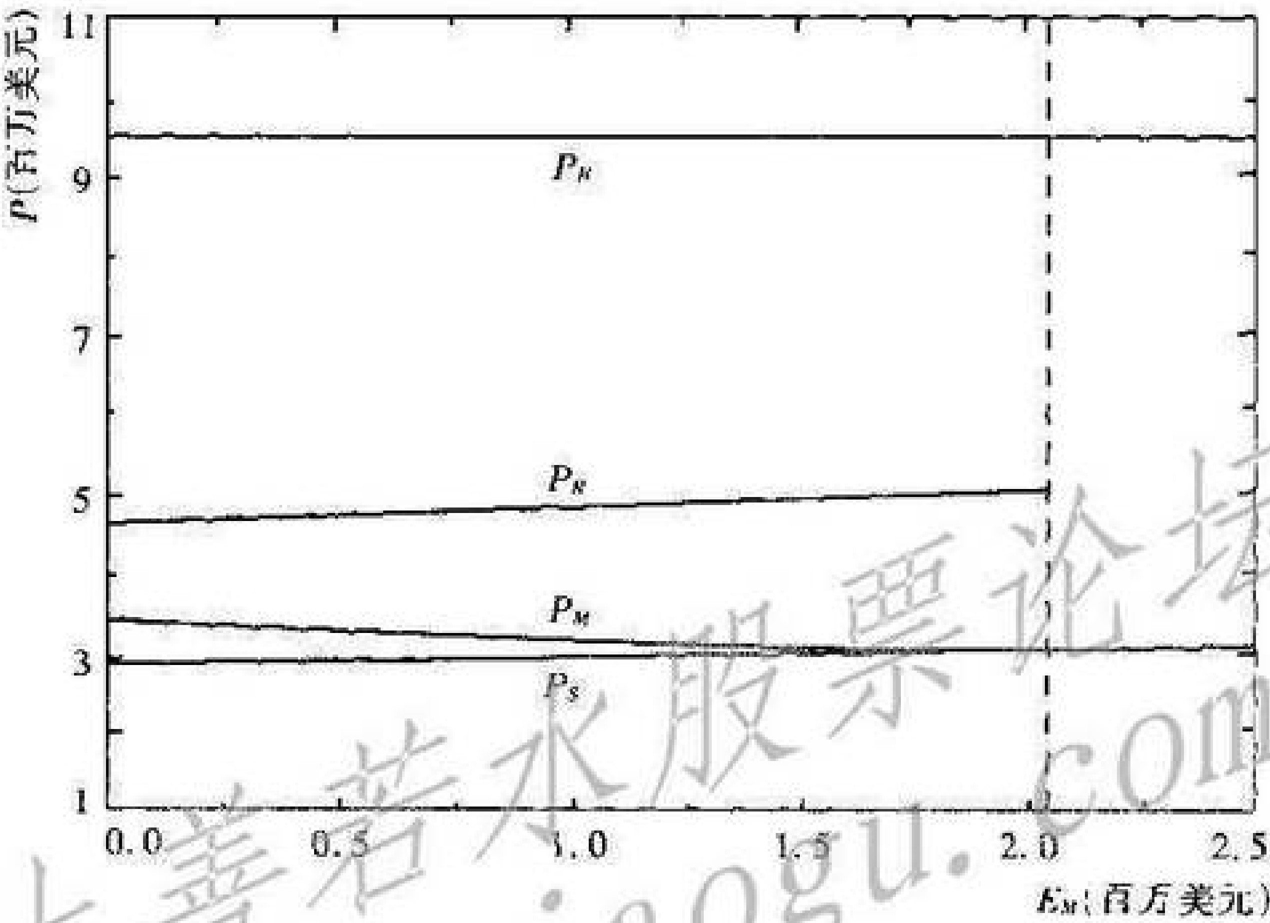


图 7—9 作为封存的一次性成本 E_M 的函数的临界值

图 7—10 显示了作为已封存油轮的年维护成本 M 的函数的最优临界值。正如图中所显示的，在决定封存对企业来讲是否是一种可行选择时，这是一个临界参数。注意到，一直到 M 达到大约 72 万美元之前，封存仍然是一种选择，我们的基本价值 51.5 万美元离这个值并不太远。回想到较高的 M 值降低了油轮的价值，从而提高了投资的临界值。较高的 M 值也使封存更不合意，因此，减少了 P_R 和 P_M，而提高了 P_S。

图 7—11 显示了作为年运营成本 C 的函数的四个临界值。正如在较高的 M 值情形下，较高的运营成本减少了油轮的价值，并因此提高了投资所需的临界值 P_H。然而，正如人们所预期的，运营成本的变化对油轮的价值，从而对 P_H 的影响要比维护成本 M 的变化对它们的影响大得多。此外，由 241
于较高的运营成本减少了正在运营的油轮的价值，它提高了临界值 P_R，在这一点一艘封存的油轮将被重新启动，而且也提高了临界值 P_M 和 P_R，因此，在企业愿意封存或废弃其油轮之前，收益 P 并不需要下降得太多。

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

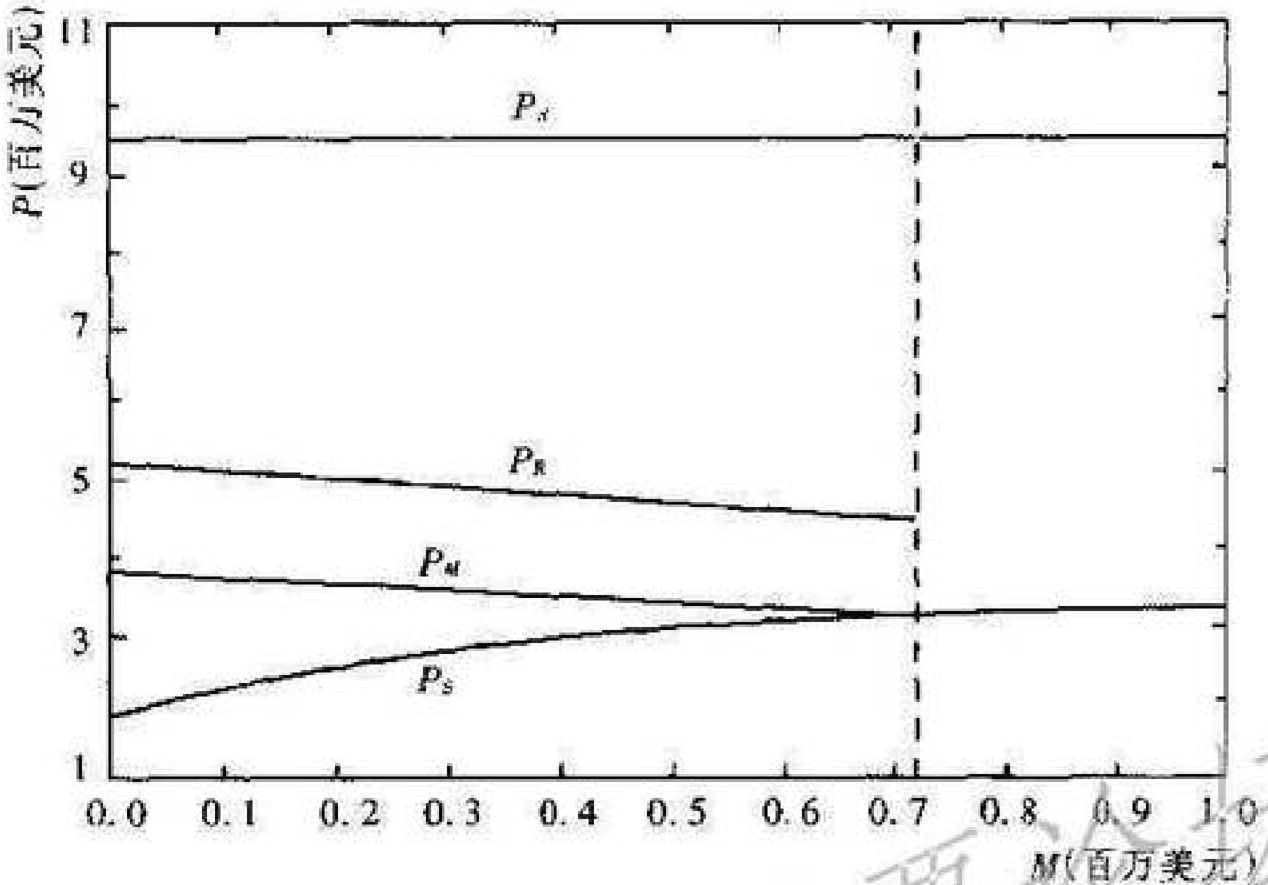


图 7—10　作为年维修成本 M 的函数的临界值

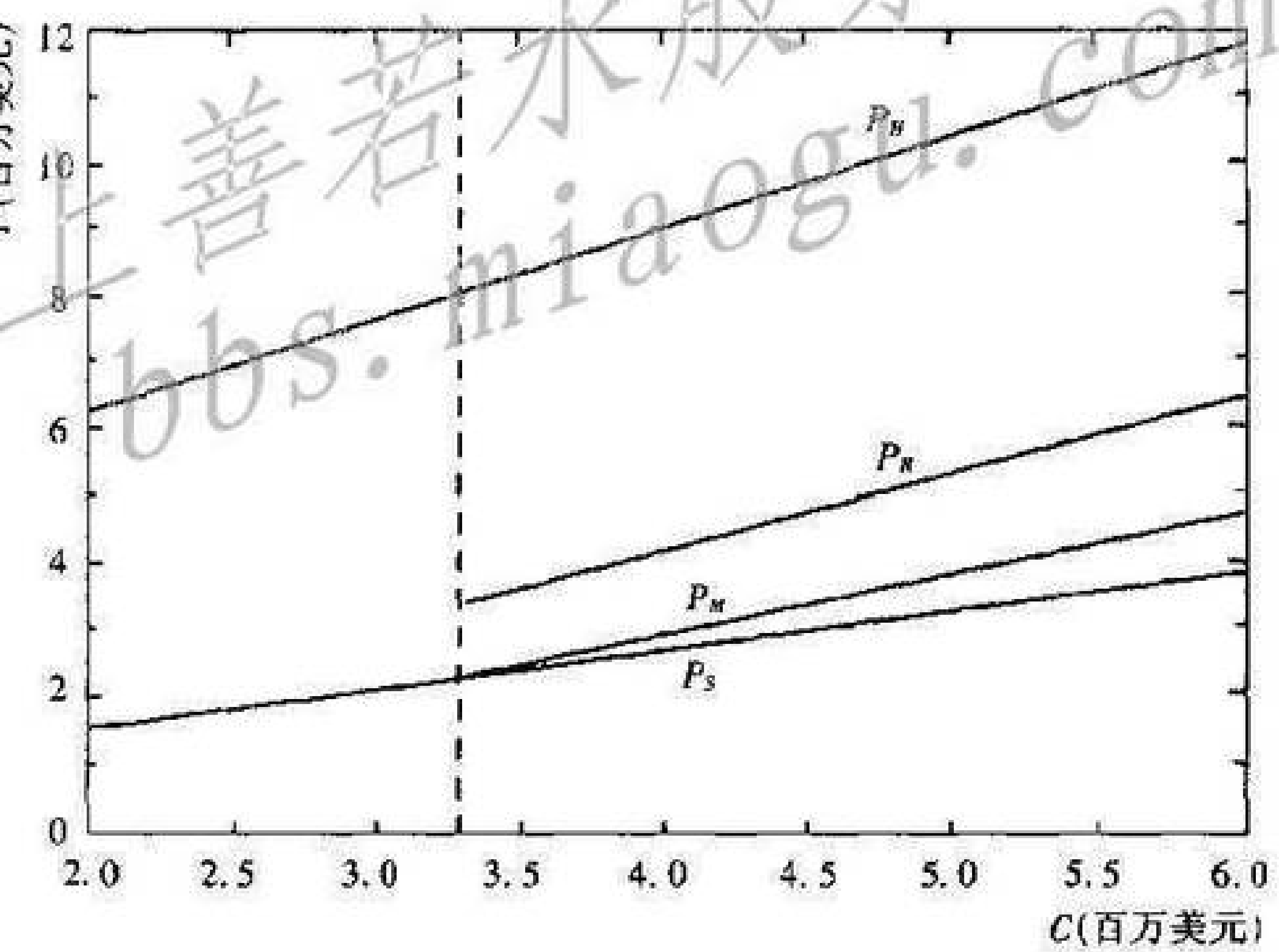


图 7—11　作为年运营成本 C 的函数的临界值

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

最后，图 7—12 显示了作为 S 的函数的临界值，其中 S 是收益 P 的年变化率的标准差。注意，这些临界值，特别是 P_H 和 P_S，对 σ 非常敏感。正

如我们在前面的铜业例子所看到的，对大的 σ 值，不活动的区域会大幅扩张。而且，注意到如果 σ 小于 0.1，P_M 和 P_S 是一致的，则封存就不是企业会使用的选择。理由是，只有在不远的将来收益的大幅提高存在合理的概率时（因而油轮将会被重新启动），封存才是有用的。对于 $\sigma<0.1$，考虑到封存、重新启动及维护成本，使收益得到大幅度提高从而使封存变得经济的概率非常小。

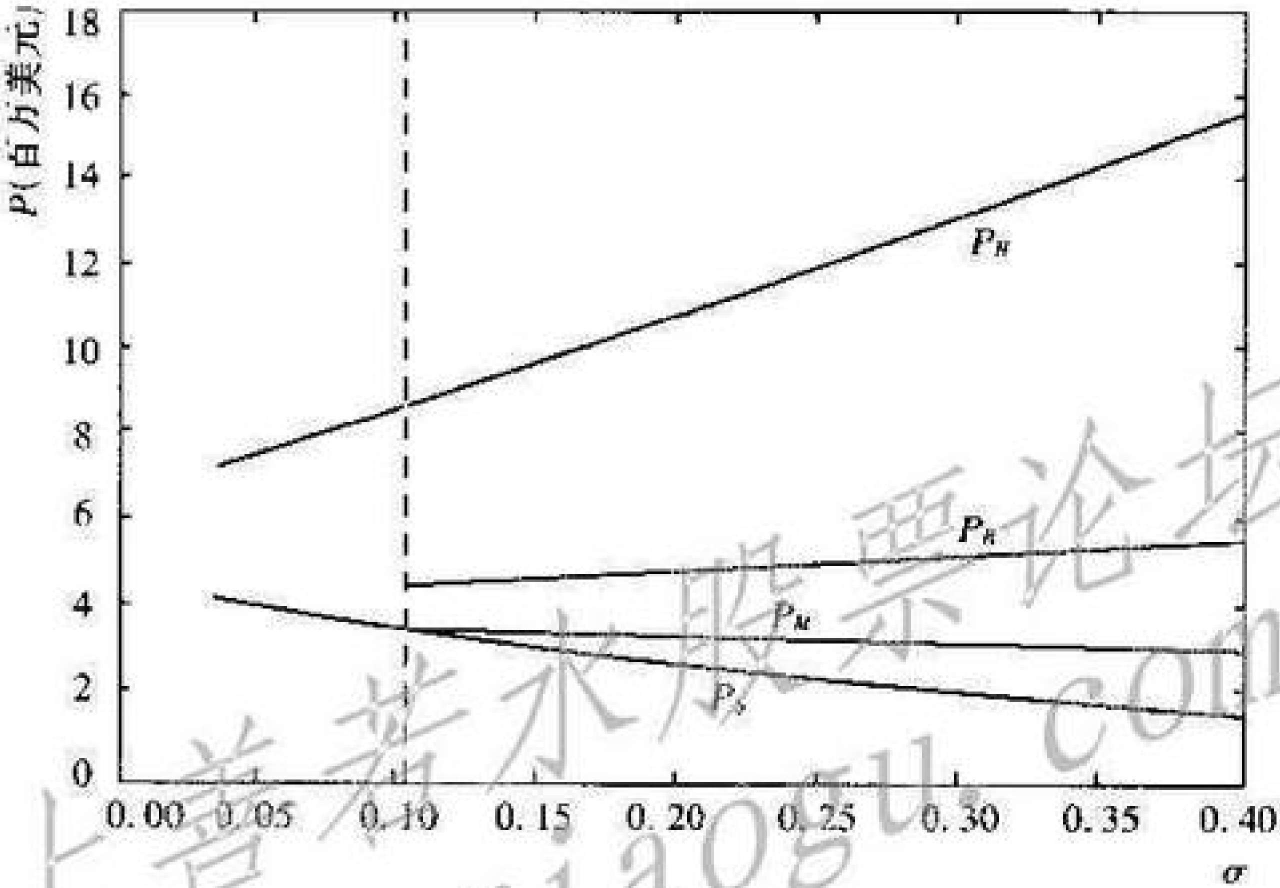


图7—12 作为流动性 σ 的函数的临界值

上善若水股票论坛 bbs.miaogu.com

7.3 文献导引

242

关于投资与放弃联合决策的先驱性文章见布伦南和施瓦茨（Brennan and Schwartz，1985）的著作。他们构建了一个关于开发、关闭及封存一座生产某种自然资源的矿山的决策的非常一般性的模型，该自然资源的价格随时间推移而波动。矿藏总存量的有限性引入了超出本章所考虑的所有问题的额外的复杂性。事实上，正是模型的这种复杂性隐藏着一些重要的理念。在得到描述投资与放弃的价格临界值的方程系统后，布伦南和施瓦茨立即求助于数值解。他们得到了进入与退出临界价格的比率，并证明对合理的参数值来讲，该比率超过1。

迪克西特（Dixit，1989a）将进入与退出决策从封存或有限存量的问题中分离出来。从而产生了一些解析性结论和见解。特别地，他分别把进入和退出临界价格与全部成本和可变成本的短视或马歇尔标准单独地进行比较。他阐明了投资与放弃的独立选择中的时间价值的作用，或更一般地，阐述了现状的期权价值的作用。我们的说明基本上遵循迪克西特的处理方法。

最优封存决策的一些较早的工作是由莫辛（Mossin，1968）作出的，他发展了一个模型，在该模型中，经营收入服从一种带有高低两个反射壁的无趋势的随机游动，而且在模型中不存在废弃的可能性。他计算了最优收入水平，在这一水平上，封存并重新启动该项目是最优的。布伦南和施瓦茨（Brennan and Schwartz，1985）的更一般的模型包含了封存的可能性及积极经营和放弃的可能性。然而，由于对封存及放弃的较低的临界值使用了相同的符号，他们混淆了从一种活动状态到两种状态间的过渡。当获得数值解时，他们专门研究了维护成本为零的一个模型；那么，废弃就永远不会被利用，而他们认为转换只会在两种状态之间——运营与封存。我们的方法再一次遵循了迪克西特（Dixit，1988）后来在某种程度上更清晰的分析。

在本章，我们所研究的模型都是关于适应不断变化的经济条件的许多方案间进行最优转换的一般问题的例子。每次转换都是一种期权的执行，每次
244 转换都产生了一种资产，这种资产再次将盈利流量与转换期权结合起来。这样，我们有一组联合的或混合的期权，而且必须同时为它们定价。分析此类混合期权的文献非常多，这些文献或者是从一般理论角度进行分析，或者旨在特殊的应用。在金融经济学中，格斯奇（Geske，1979）的著作是这类文献中早期的一个例子；后来的文献包括格斯奇和约翰逊（Geske and Johnson，1984）及卡尔（Carr，1988）的著作。

至于实际投资决策，库拉蒂拉卡和马库斯（Kulatilaka and Marcus，1988）发展出一个三时间阶段在两种模式下进行转换的模型，并且简要说明，它如何能够被扩展到许多模式和转换中。通过将不同的模型放入其框架，他们还总结了关于实物期权的早期文献。

法恩和弗洛伊德（Fine and Freund，1990）考察了一个一般的两阶段模型，其中企业必须在不确定性被解决之前选择其生产能力，并且它或者可以选择特定资本（适合于特殊产出），或者可以选择灵活性资本（它可以产出所有类型的产出，尽管成本更高）。特里安蒂斯和霍德（Triantis and Hodder，1990）给出了连续时间下的类似模型。何和平迪克（He and

Pindyck, 1992）通过考虑生产能力后来的扩张而使分析更进一步。在所有这些模型中，期权价值更加重要，因为通过等待企业保持了以后作出更好投资的机会，而不仅仅是根本不投资，就像第5章和第6章的模型所述的情形。

本特利拉和伯特拉（Bentolila and Bertola，1990）考察了存在雇用和解雇费用时企业的雇用决策。迪克西特（Dixit，1989b，c）考虑了汇率波动时的生产与进出口选择。这是以鲍德温和克鲁格曼（Baldwin and Krugman，1989）所做的较早的工作为基础的；还可参见克鲁格曼（Krugman，1989）的论述。杜马斯（Dumas，1992）和克鲁格曼（Krugman，1988）在一般均衡水平上发展了一个将汇率过程内生化的模型。科格特和库拉蒂拉卡（Kogut and Kulatilaka，1993）考虑了为适应汇率的变动，跨国企业将生产从一个国家转移到另一个国家的决策。范·威金伯根（Van Wijnbergen，1985）构建了政策不确定背景下欠发达国家资本流出的两阶段模型。

上海淼股票论坛 bbs.miaogu.com

【本章注释】

[1] 从事一项新研究项目的科学家必须投入资本，如熟悉文献、学习新的数学技能或实验技巧等。我们的经验是，这种资本锈蚀得非常快，如果我们将项目搁置哪怕仅有几个星期的时间。

[2] 该证明非常长且非常乏味，因此我们忽略了它。有兴趣的读者可参考迪克西特（Dixit，1989，Appendix A）的著作。

[3] 给定好的互动的图像软件计算这些临界值时可以转化为几何方法。在$G(P)$的图像上加上水平线 I 和 $-E$，并调整系数 A_1 和 B_2，直到你到达相切点。切点的横坐标就是最优临界值 P_H 和 P_L。

[4] 一些宏观经济学家发现，从静态预期到理性预期是一种非常有趣的反语，它隐含着更多，而不是更少。

[5] 布伦南和施瓦茨（Brennan and Schwartz，1985）利用或有债权方法来评价铜矿，并集中于封存和以后重新启动矿山的期权。

[6] 例如，参见博迪和罗斯斯基（Bodie and Rosanski，1980）及布伦南（Brennan，1991）对 σ 的考虑。对便利收益的比率采用 $\delta=0.04$，与它在过去20年间的平均值非常接近。但是人们应当记住，这一参数随着时间推移波动的范围非常大。曾经持续过很长一段时间，它的值接近于零；也在很短的一段时间内（当存货的总量非常低的时候），它每年高达30%～40%。为简化分析，我们已经假定一个常数 δ。对便利收益及其一般变动的讨论，以

及对铜业的讨论，参见布伦南（Brennan，1991）及平迪克（Pindyck，1993c，d）的论述。

[7] 由于项目每年生产出1 000万磅的铜，投资的净现值（以百万美元计）为 $-20+\frac{10P}{0.04}-\frac{8}{0.04}$。（收益流以利率 $\mu=0.06$ 进行折现，但是预期将以增长率 $\alpha=0.02$ 增长，而运营成本以无风险利率 $r=0.04$ 进行折现。）如果 $\sigma=0$，则这一净现值 >0，即如果 $P>0.88$ 美元，企业将投资。同样，一旦企业在市场中，存在的净现值为 $-2-\frac{P}{0.04}+\frac{8}{0.04}$，当 $P<0.79$ 美元时，它为正。

[8] 在一个垄断性产业中，对持有一个封存项目可能有战略性原因，但我们在这里不考虑市场结构。

[9] 关于油轮业的一般介绍，参见罗林森和波特（Rawlinson and Porter，1986）的论述。冈卡弗斯（Goncalves，1992）也曾利用或有债权方法考察了油轮的最优投资决策，以及瞬时合约价格与长期合约价格之间的关系。

[10] 我们从波士顿的火星软件公司（Marsoft）获得关于收益、成本及其他行业变量的时间序列数据。我们感谢火星软件公司总经理阿里·G·斯特林博士（Arlie G. Sterling）提供的这些数据，以及给我们提供的关于这个行业的各类经济问题方面的建议。我们也感谢挪威经济与商业学院的维克多·诺曼和西里·彼得森·斯特兰德尼斯（Victor Norman and Siri Pettersen Strandenes），他们也提供了数据和建议。

[11] 不像图7—7，关于 P_R 和 P_M 曲线的三次根形式在纵轴上不相交，因为在画出前面的图像时，我们假定封存的成本为零，而这个数值例子中不是这种情形。

上草药水股票论坛 bbs.miaogu.com

第Ⅳ篇

产业均衡

上善若水股票论坛
bbs.miaogu.com

上善若水股票论坛
bbs.miaogu.com

第8章　竞争性产业的动态均衡

上善若水股票论坛
bbs.miaogu.com

在第5章～第7章里，我们考察了单个企业的各种投资与不投资决策，其中我们假定该企业具有投资于某一给定项目的垄断权利，并且忽略了其他企业加入竞争的可能性。[1]经营性项目的利润流受制于正在发生的波动。由于我们假定该项目会产生固定的产出流，因此，我们能将这些波动模型化为外生的定价过程，我们发现教科书中的马歇尔现值标准或价格成本的比较根本不是企业最优选择。在适度不确定条件下，只有当现行价格超过了长期平均成本，或投资沉没成本的现行收益率超过了资本的成本时，而且这些差额经常很大，投资才被证明是合理的。同样地，不是在价格低于平均可变成本，或现行的经营利润变成负值时，而是在损失变得非常大时，企业才

会放弃投资，其原因在于不确定性条件下作出不可逆决策之前等待的期权价值。

248 在实践中，大多数企业并不享有投资的垄断权利，取而代之的是企业必须考虑新竞争对手进入的可能性，或是已有竞争对手扩张的可能性。这使我们对先前的基本结论产生了怀疑。等待的期权价值取决于企业的竞争对手的行为，在自由进入的情形下，这种价值会减少为零吗？它不会使马歇尔的比较价格标准恢复到投资状况下的长期平均成本和不投资的平均可变成本吗？因此，读者可能会怀疑，有关单个企业理论并不适用于扩展到产业均衡的分析范围。

在本章和下一章，我们提出了这些问题，答案是极为确定的。等待的价值会发生什么变化不仅仅取决于竞争的特性，还取决于不确定性的特性。我们发现，当不确定性为企业特定时，企业等待的价值会继续存在，并且我们对企业水平的分析能简单地推广到产业均衡。由于综合的或是产业范围的不确定性，任何企业的等待价值都不会降为零，但是也不会恢复到马歇尔的价格——成本比较标准。尽管原因不同，但最优条件下投资与不投资的临界价格会以我们在第5章～第7章对企业水平分析相同的方式与成本相区别，我们不再详细说明外生价格的随机过程。价格是产业均衡的内生变量，我们必须追溯不确定性的更深层次，也就是需求和成本的条件。当不确定性为产业范围时，新的价格进入的内在反馈就产生了马歇尔和最优规则之间的差距。

对垄断性企业的早期分析也服务于教学目的及真实目的。我们对产业水平的所有分析使用的是在前面章节建立和阐述过的相同方法（动态规划与或有债权分析）。因此，为了使读者能熟悉这些新方法，以前的工作为读者提供了比较简单的假定。

本章关注的是产业均衡的基本理论。换句话说，我们采用了第5章～第7章的企业决策模型，并尽可能把它直接融入产业均衡的模型中。因此，在下一章我们考察了该模型的推广及应用。我们考察了企业之间的异质性，并且考察了在这种产业中数量不多的企业之间存在的不完全竞争的一个简单例子。

最后，可能也是最重要的，在第9章，我们也考察了有关投资政策的问题。如果企业在不确定条件下的不可逆选择受到维持原状的期权价值的巨大
249 影响并因此具有相当大的惯性，则政府是否应当努力地鼓励投资呢？不同的